Matemática IV 2018- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

Escolha o problema 1 OU 2.

Problema 1:

a) (1.5) Seja $w = \frac{1+i}{1-i}$ tome $z = \frac{1}{2} \cdot (1+w)^2$. Determine o conjunto $z^{1/3}$ e indique qual é a **raíz cúbica principal** de z.
Obs: coloque os resultados finais na forma $x + iy$.

b) (1.0) Seja C_0 o círculo no plano complexo com centro em $z_0 = -2$ e raio $R = 2\sqrt{5}$, mostre que

$$\left| z^2 + z(2-i) - 2i \right| \geq 10, \quad \forall\, z \in C_0.$$

Problema 2:

a) (1.5) Seja $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$. Determine z^{30}.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$.

b) (1.0) Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Prove que $|z_1| = |z_2|$ se, e somente se, existem números complexos c_1 e c_2 tais que

$$z_1 = c_1 \cdot c_2 \quad \text{e} \quad z_2 = c_1 \cdot \overline{c_2}.$$

Escolha DOIS dentre os problemas $3 - 5$.

Problema 3:

a) (1.0) Calcule

$$\lim_{z \to \infty} \frac{2018 \cdot (z+1) + i \cdot \tan\left(\frac{1}{|z|}\right)}{2z+3}.$$

b) (1.0) Mostre que não existe

$$\lim_{z \to 0} \frac{|\operatorname{Re}(z) + z| \cdot |\operatorname{Im}(z) - z|}{|z|^2}.$$

c) (0.5) Calcule

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 2z \cdot i + 3}{z - i}.$$

Problema 4**:** (2.5) Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas e $z_0 \in \mathbb{C}$, suponha que exista um inteiro positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0. Mostre que se $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ então

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0.$$

Problema 5**:** (2.5) Seja $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1, \mathrm{Im}(z) > -1\}$, considere a função $f : S \to \mathbb{C}$ dada por

$$z = x + iy, \qquad f(z) = \frac{x}{y+1} + i \cdot \left(\frac{y}{x+1}\right).$$

Determine todos os pontos onde f é diferenciável e calcule o valor da derivada nesses pontos.

Resolva o problema 6**.**

Problema 6**.** (2.5) Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais diferenciáveis em todo ponto, definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = g(x) \cdot y + h(y) \cdot x \cdot i, \text{ onde } z = x + iy.$$

Mostre que se f for uma função derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$ então existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = -K \cdot z \cdot i,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema Bônus. (1.0) Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complexos. Prove que existe um subconjunto de índices $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ de forma que

$$\left| \sum_{j \in J} z_j \right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Dica: Considere uma divisão do plano complexo nas quatro regiões delimitadas pelas retas $x = y$ e $x = -y$ (onde $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$). Procure estudar o que ocorre se tomarmos todos os pontos z_j pertencentes a uma destas regiões.

Boa Prova!!