Matemática IV 2018- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) : 1-Punch-Man

1	2 X	3	4 X	5 X	6 X	Bônus X	Total
2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	1,0	11,0

Instruções:

- **Horário de início: 19:00h   Horário de encerramento: 19:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos a avaliação será anulada;
- Coloque o RA em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Matemática IV 2018- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

Escolha o problema 1 **OU** 2**.**

Problema 1**:**

a) (1.5) Seja $w = \frac{1+i}{1-i}$ tome $z = \frac{1}{2} \cdot (1+w)^2$. Determine o conjunto $z^{1/3}$ e indique qual é a **raíz cúbica principal** de z.
Obs: coloque os resultados finais na forma $x + iy$.

b) (1.0) Seja C_0 o círculo no plano complexo com centro em $z_0 = -2$ e raio $R = 2\sqrt{5}$, mostre que

$$\left| z^2 + z(2-i) - 2i \right| \geq 10, \quad \forall\ z \in C_0.$$

Problema 2**:**

a) (1.5) Seja $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$. Determine z^{30}.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$.

b) (1.0) Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Prove que $|z_1| = |z_2|$ se, e somente se, existem números complexos c_1 e c_2 tais que

$$z_1 = c_1 \cdot c_2 \quad \text{e} \quad z_2 = c_1 \cdot \overline{c_2}.$$

Escolha DOIS dentre os problemas $3 - 5$**.**

Problema 3**:**

a) (1.0) Calcule

$$\lim_{z \to \infty} \frac{2018 \cdot (z+1) + i \cdot \tan\left(\frac{1}{|z|}\right)}{2z+3}.$$

b) (1.0) Mostre que não existe

$$\lim_{z \to 0} \frac{|\operatorname{Re}(z) + z| \cdot |\operatorname{Im}(z) - z|}{|z|^2}.$$

c) (0.5) Calcule

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 2z \cdot i + 3}{z - i}.$$

Problema 4: (2.5) Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas e $z_0 \in \mathbb{C}$, suponha que exista um inteiro positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0. Mostre que se $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ então

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0.$$

Problema 5: (2.5) Seja $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > -1, \mathrm{Im}(z) > -1\}$, considere a função $f : S \to \mathbb{C}$ dada por

$$z = x + iy, \qquad f(z) = \frac{x}{y+1} + i \cdot \left(\frac{y}{x+1} \right).$$

Determine todos os pontos onde f é diferenciável e calcule o valor da derivada nesses pontos.

Resolva o problema 6**.**

Problema 6**.** (2.5) Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais diferenciáveis em todo ponto, definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = g(x) \cdot y + h(y) \cdot x \cdot i, \text{ onde } z = x + iy.$$

Mostre que se f for uma função derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$ então existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = -K \cdot z \cdot i,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema Bônus. (1.0) Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complexos. Prove que existe um subconjunto de índices $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ de forma que

$$\left| \sum_{j \in J} z_j \right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Dica: Considere uma divisão do plano complexo nas quatro regiões delimitadas pelas retas $x = y$ e $x = -y$ (onde $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$). Procure estudar o que ocorre se tomarmos todos os pontos z_j pertencentes a uma destas regiões.

Boa Prova!!

Soluções

Problema 1:
a) Observe que

$$w = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{|1-i|^2} = \frac{2i}{2} = i.$$

Logo, $z = \frac{1}{2}(1+w)^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^2$. Como

$$\cos \pi/4 = \operatorname{sen} \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

então

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z = (e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Logo o **argumento principal** de z é $\Theta = \pi/2$. Pelo que fizemos em sala, as raízes cúbicas de z são dadas por

$$c_k = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i(\frac{\pi/2}{3} + \frac{2k\cdot\pi}{3})} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\cdot\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Como $\Theta = \pi/2$ é o argumento principal, a raíz principal é dada quando $k = 0$, ou seja, a raíz principal é:

$$c_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \pi/6 + i \operatorname{sen} \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

As outras raízes são:

$$c_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$c_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -i.$$

b) Primeiramente lembremos que o círculo C_0 pode ser escrito como:

$$C_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| = 2\sqrt{5}\}.$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned}
z^2 + z(2-i) - 2i =& ((z+2)-2)^2 + ((z+2)-2)(2-i) - 2i \\
=& (z+2)^2 - 4(z+2) + 4 + (z+2)(2-i) - 4 + 2i - 2i \\
=& (z+2)^2 - 4(z+2) + (z+2)(2-i) \\
=& (z+2)^2 + (z+2)(-4+2-i) \\
=& (z+2)^2 + (z+2)(-2-i) \\
=& (z+2)(z-i)
\end{aligned}$$

Logo, se $z \in C_0$ temos

$$|z^2 + z(2-i) - 2i| = |z+2||z-i| = 2\sqrt{5} \cdot |z-i|. \tag{0.1}$$

Assim, basta estimar o termo $|z-i|$. Pela desigualdade triângular temos:

$$|z-i| = |(z+2) - (2+i)| \geq |z+2| - |2+i| = 2\sqrt{5} - \sqrt{5}.$$

Logo, por (0.1) temos:

$$|z^2+z(2-i)-2i| = |z+2||z-i| = 2\sqrt{5}\cdot|z-i| \geq 2\sqrt{5}\cdot(2\sqrt{5}-\sqrt{5}) = 20-10 = 10,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Problema 2:

a) Seja $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$, como $\cos(\pi/3) = 1/2$ e $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ então temos

$$z = e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}.$$

Assim,

$$z^{30} = (e^{i\cdot\frac{\pi}{3}})^{30} = e^{i\cdot\frac{30\pi}{3}} = e^{i\cdot 10\pi} = 1.$$

b) Primeiramente vamos fazer a volta.
($\Leftarrow$) Suponhamos que existem $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tais que $z_1 = c_1c_2$ e $z_2 = c_1\overline{c_2}$. Então

$$|z_1| = |c_1c_2| = |c_1||c_2| = |c_1||\overline{c_2}| = |c_1\overline{c_2}| = |z_2|.$$

Assim, a volta está demonstrada. Vamos agora demonstrar a ida.

($\Rightarrow$) Coloquemos $r := |z_1| = |z_2|$, $r > 0$. Então, podemos escrever z_1 e z_2 na forma polar, digamos:

$$z_1 = r \cdot e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z_2 = r \cdot e^{i\theta_2}.$$

Tomemos agora

$$c_1 := r \cdot e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \quad \text{e} \quad c_2 := e^{i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}.$$

Assim,

$$c_1 c_2 = r \cdot e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} = r \cdot e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} = r \cdot e^{i\theta_1} = z_1,$$

e

$$c_1 \overline{c_2} = r \cdot e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \cdot e^{-i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} = r \cdot e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} = r \cdot e^{i\theta_2} = z_2.$$

Logo, de fato existem dois números complexos c_1, c_2 satisfazendo $z_1 = c_1 c_2$ e $z_2 = c_1 \overline{c_2}$, concluindo o que queríamos demonstrar. $\square$

Problema 3:

a) Considere $f(z) := \frac{2018 \cdot (z+1) + i \cdot \tan\left(\frac{1}{|z|}\right)}{2z+3}$. Por um teorema visto em sala sabemos que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w.$$

Basta então calcular $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{z \to 0} \frac{2018 \cdot \left(\frac{1}{z}+1\right) + i \cdot \tan(|z|)}{2 \cdot \frac{1}{z} + 3} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{2018 \cdot \frac{1+z}{z} + i \cdot \tan(|z|)}{\frac{2+3z}{z}} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{2018 \cdot (1+z) + z \cdot i \cdot \tan(|z|)}{2+3z} \\
&= \frac{2018(1+0) + 0 \cdot i \cdot \tan 0}{2 + 3 \cdot 0} \\
&= \frac{2018}{2} = 1009.
\end{aligned}$$

Assim, pelo teorema mencionado, concluimos que o limite dado é igual a 1009.

b) Tomaremos duas formas de convergência a 0 que nos dariam valores diferentes para o limite. Consideremos $z \to 0$ pelo eixo real, ou seja, $z = x + iy$ com $y = 0$ e $x \to 0$. Neste caso temos $z = x$ e, portanto,

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\operatorname{Re}(z) + z| \cdot |\operatorname{Im}(z) - z|}{|z|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|x + x| \cdot |0 - x|}{|x|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2|x|^2}{|x|^2} = 2.$$

Consideremos agora $z \to 0$ pelo eixo imaginário, ou seja, $z = x+iy$ com $x = 0$ e $y \to 0$. Neste caso, $z = y \cdot i$ e assim

$$\lim_{z\to 0} \frac{|\operatorname{Re}(z) + z| \cdot |\operatorname{Im}(z) - z|}{|z|^2} = \lim_{y\to 0} \frac{|0 + yi| \cdot |y - yi|}{|y|^2} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|^2 \cdot |1 - i|}{|y|^2} = |1-i| = \sqrt{2}.$$

Como ambas as formas de convergência geraram resultados distintos pode-se concluir que o limite não existe. $\square$

c) Observe que ao calcularmos o polinômio "de cima" $z^2 + 2z \cdot i + 3$ em $z = i$ obtemos: $i^2 + 2i^2 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$. Isto significa que o polinômio de cima é divisível por $z - i$. De fato, observe que:

$$z^2 + 2z \cdot i + 3 = (z - i)(z + 3i).$$

Assim,

$$\lim_{z\to i} \frac{z^2 + 2z \cdot i + 3}{z - i} = \lim_{z\to i} \frac{(z - i)(z + 3i)}{z - i} = \lim_{z\to i} z + 3i = 4i.$$

Problema 4.

Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)g(z) - 0| < \varepsilon.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer e considere V a vizinhança de z_0 na qual $|g(z)| \leq M$, $\forall z \in V$. Como $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Como $z_0 \in V$, existe δ_1 tal que $B(z_0, \delta_1) \subset V$. Tome $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Assim, se $0 < |z - z_0| < \delta$ então $|g(z)| \leq M$ e $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}$, logo

$$|f(z) \cdot g(z)| = |f(z)||g(z)| \leq |f(z)| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Logo $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$ como queríamos demonstrar. $\square$

Problema 5.
Seja $f(x+iy) = \frac{x}{y+1} + i\cdot\left(\frac{y}{x+1}\right)$, então $u(x,y) = \frac{x}{y+1}$ e $v(x,y) = \frac{y}{x+1}$. Observe que u e v são diferenciáveis em qualquer ponto (x,y) com $x > -1$ e $y > -1$ pois são frações de dois polinômios onde o de baixo não se anula (nos pontos do domínio). Assim as derivadas parciais u_x, u_y, v_x e v_y existem em todos os pontos do domínio de f e são dadas por:

$$u_x = \frac{1}{y+1}, \quad u_y = \frac{-x}{(y+1)^2}, \quad v_x = \frac{-y}{(x+1)^2}, \quad v_y = \frac{1}{x+1}$$

que também são contínuas em qualquer ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $x > -1$ e $y > -1$ pois são frações de polinômios em x e y. Finalmente, pelo Teorema de condições suficientes para derivabilidade para verificar a derivabilidade de f em um ponto (x,y) basta então verificarmos em quais pontos as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Se

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x$$

então

$$\frac{1}{y+1} = \frac{1}{x+1} \quad \text{e} \quad \frac{-x}{(y+1)^2} = \frac{y}{(x+1)^2}.$$

A primeira igualdade nos dá $y+1 = x+1 \Rightarrow x = y$. Substituindo y por x na segunda igualdade obtemos:

$$\frac{-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0.$$

Logo o único ponto onde as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas é o ponto $(x,y) = (0,0)$ ou, equivalentemente, $z = 0$. Portanto concluimos que f é derivável apenas no ponto $z = 0$. A derivada neste ponto é dada por:

$$f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = \frac{1}{0+1} + i\cdot\frac{0}{(0+1)^2} = 1.$$

Problema 6. Seja

$$f(z) = g(x)\cdot y + h(y)\cdot x\cdot i, \text{ onde } z = x+iy,$$

uma função derivável em todo ponto z, então pelo Teorema das condições necessárias e suficientes f deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto. Sejam

$$u(x,y) = g(x) \cdot y \quad \text{e} \quad v(x,y) = h(y) \cdot x$$

temos

$$u_x = g'(x)y, \quad u_y = g(x)$$
$$v_x = h(y), \quad v_y = h'(y)x.$$

Logo $u_y = -v_x$ implica que $g(x) = -h(y)$. Como as equações de Cauchy-Riemann acontecem em todo ponto então temos

$$g(x) = -h(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Fixe $y = 0$ e chame $K = -h(0)$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $g(x) = -h(0) = K$, logo g é constante igual a K. Analogamente, fixe $x = 0$. Então, para todo $y \in \mathbb{R}$ temos $h(y) = -g(0) = -K$, logo h é constante igual a $-K$. Assim concluímos que

$$f(z) = g(x)y + h(y)xi = K(y - xi) = K(x + iy) \cdot (-i) = -Kz \cdot i,$$

com K constante, como queríamos demonstrar. $\square$

Bônus. Consideremos a divisão do plano complexo sugerida na dica. Denotemos por R_1, R_2, R_3 e R_4 tais regiões, conforme indicado na figura abaixo.

Denotemos por $J_i \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto de índices tais que $z_k \in R_i$ para todo $k \in J_i$. Seja S a soma dos módulos de todos os pontos z_j, então

$$S = \sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{k \in J_1} |z_k| + \sum_{k \in J_2} |z_k| + \sum_{k \in J_3} |z_k| + \sum_{k \in J_4} |z_k|.$$

Logo, existe um $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ para o qual temos

$$\sum_{k \in J_i} |z_k| \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} |z_j|. \tag{0.2}$$

Suponha sem perda de generalidade que tal i seja 1 (os outros 3 casos são análogos). Consideremos então todos os pontos que estão na região R_1. Observe

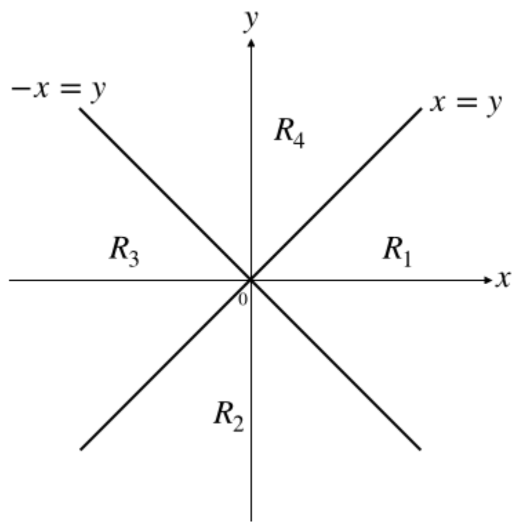

Figure 1: Regiões delimitadas pelas retas $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ e $-\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

que $z = x + iy \in R_1$ se, e somente se, $x \geq |y|$ (aqui já utilizamos o fato que $z \in R_1 \Rightarrow x \geq 0$). Logo,

$$z_k = x_k + iy_k \in R_1 \Rightarrow |z_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq \sqrt{x_k^2 + x_k^2} = x_k\sqrt{2}.$$

Assim,

$$\sum_{k\in J_1} |z_k| \leq \sqrt{2} \sum_{k\in J_1} x_k \leq \sqrt{2}\sqrt{\left(\sum_{k\in J_1} x_k\right)^2 + i\left(\sum_{k\in J_1} y_k\right)^2} = \sqrt{2}\left|\sum_{k\in J_1} z_k\right|,$$

ou seja,

$$\left|\sum_{k\in J_1} z_k\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in J_1} |z_k|.$$

Finalmente, por (0.2) temos

$$\left|\sum_{k\in J_1} z_k\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in J_1} |z_k| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j|,$$

concluindo o que queríamos demonstrar. □.