Matemática IV 2018-Exame Final

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	6	7	Total

Instruções:

- **Horário de início: 21:00h Horário de encerramento: 22:50h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos ou for identificada qualquer forma de cola ou fraude a avaliação será anulada;
- Indique quais questões você escolheu circulando o número da questão na tabela acima;
- Coloque **APENAS** o RA em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Matemática IV 2018- Exame

Prof. Gabriel Ponce

Escolha 4 problemas dentre os 7 listados abaixo.

Problema 1:

a) (1.25) Seja $z = 1 + i$, $w = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, calcule $z^4 \cdot w^{-6}$.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$

b) (1.25) Seja $z = 8 \cdot i$ calcule os três elementos do conjunto $z^{1/3}$.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$

Solução:
a) Seja $z = 1 + i$ então $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Logo

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

já que

$$\cos \pi/4 = \operatorname{sen} \pi/4 = \sqrt{2}/2.$$

Então

$$z^4 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 2^2 e^{i \cdot 4\pi/4} = 4e^{i\pi}.$$

Como $e^{i \cdot \pi} = -1$ então $z^4 = -4$.

Analogamente, temos $w = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ pois $|w| = 1$ e

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Logo $w^{-6} = (e^{i\frac{5\pi}{6}})^{-6} = e^{i \cdot 5\pi} = e^{i \cdot 4\pi} \cdot e^{i \cdot \pi} = 1 \cdot (-1) = -1$. Concluímos então que

$$z^4 \cdot w^{-6} = -4 \cdot (-1) = 4.$$

b) Seja $w = 8 \cdot i = 8 \cdot e^{i \cdot \pi/2}$ sabemos que

$$z^{1/3} = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\left(\frac{\pi/2}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

- Para $k = 0$ temos

$$q_0 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 2 \cdot (\cos \pi/6 + i \cdot \operatorname{sen} \pi/6) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

- Para $k = 1$ temos

$$q_1 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}} = 2 \cdot (\cos 5\pi/6 + i \cdot \operatorname{sen} 5\pi/6) = 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i.$$

- Para $k = 2$ temos

$$q_2 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot \frac{9\pi}{6}} = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = 2 \cdot (\cos 3\pi/2 + i \cdot \operatorname{sen} 3\pi/2) = -2i.$$

Logo

$$z^{1/3} = \{\sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i,\ -2i\}.$$

Problema 2**:**

a) (1.0) Calcule

$$\lim_{z \to \infty} \frac{z^2(z+3) + i \cdot \cos\left(\frac{1}{|z|}\right)}{z^3 + 2z + 1}.$$

b) (1.0) Mostre que não existe

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(z) \cdot z}{|z|^2}.$$

c) (0.5) Calcule

$$\lim_{z \to 2+i} \frac{3 + 4i - z^2}{(2 + i - z)(3z - i)}.$$

Solução:

a) Considere $f(z) := \frac{z^2(z+3) + i \cdot \cos\left(\frac{1}{|z|}\right)}{z^3 + 2z + 1}$. Por um teorema visto em sala sabemos que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w.$$

Basta então calcular $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{z^2}(\frac{1}{z}+3)+i\cdot\cos(|z|)}{\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}+1} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{z^3}(1+3z)+i\cdot\cos(|z|)}{\frac{1+2z^2+z^3}{z^3}} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(1+3z)+z^3\cdot i\cdot\cos(|z|)}{1+2z^2+z^3} \\
&= \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1.
\end{aligned}$$

Assim, pelo teorema mencionado, concluimos que o limite dado é igual a 1.

b) Tomaremos duas formas de convergência a 0 que nos dariam valores diferentes para o limite. Consideremos $z \to 0$ pelo eixo real, ou seja, $z = x + iy$ com $y = 0$ e $x \to 0$. Neste caso $z = x$ e

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)\cdot z}{|z|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Consideremos agora $z \to 0$ na vertical, ou seja, $z = x+iy$ com $x = 0$ e $y \to 0$. Neste caso $z = y$ e

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)\cdot z}{|z|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0\cdot y}{y^2} = 0.$$

Como o limite ao longo dos dois caminhos exibidos não são iguais podemos concluir que o limite não existe. $\square$

c) Observe que $(2+i+z)(2+i-z) = (2+i)^2 - z^2 = 3+4i-z^2$. Então

$$\frac{3+4i-z^2}{(2+i-z)(3z-i)} = \frac{(2+i+z)(2+i-z)}{(2+i-z)(3z-i)} = \frac{2+i+z}{3z-i}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2+i} \frac{3+4i-z^2}{(2+i-z)(3z-i)} &= \lim_{z\to 2+i} \frac{2+i+z}{3z-i} = \frac{2+i+2+i}{3(2+i)-i} \\
&= \frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{10} \\
&= \frac{7}{10} + \frac{1}{10}i.
\end{aligned}$$

Problema 3: (2.5) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x+iy) = (2x+y)^2 + i \cdot (2y-x)^2$. Determine todos os pontos onde f é diferenciável e calcule o valor da derivada nesses pontos.

Solução: Vamos utilizar as equações de Cauchy-Riemann. Consideremos as funções parte real e parte imaginária dadas por:

$$u(x,y) = (2x+y)^2, \quad v(x,y) = (2y-x)^2.$$

Assim

$$u_x = 8x + 4y, \ u_y = 4x + 2y$$

$$v_x = -4y + 2x, \ v_y = 8y - 4x.$$

Assim, se f for diferenciável em $z = x + iy$ devemos ter

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow 8x + 4y = 8y - 4x \quad \text{e} \quad 4x + 2y = 4y - 2x.$$

Ambas as equações nos dão a mesma condição $y = 3x$. Assim, f é **possivelmente** diferenciável apenas nos pontos $z = x + 3x \cdot i$, $x \in \mathbb{R}$. Para ver que de fato f é diferenciável em todos esses pontos basta observar que as funções

$$u_x = 8x + 4y, \ u_y = 4x + 2y$$

$$v_x = -4y + 2x, \ v_y = 8y - 4x$$

existem em todos os pares $(x,y) \in \mathbb{C}$ e são contínuas em todos os pares de $\mathbb{C}$. Assim, pelo teorema das condições necessárias e suficientes para diferenciabilidade, segue que f é diferenciável em todos os pontos da forma

$$z = x + 3x \cdot i = x(1 + 3 \cdot i), \ x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, a derivada nestes pontos é dada por:

$$\begin{aligned} f'(x + 3x \cdot i) =& u_x(x, 3x) + i \cdot v_x(x, 3x) \\ =& (8x + 4 \cdot 3x) + i \cdot (-4 \cdot 3x + 2x) \\ =& 20x - 10x \cdot i \\ =& 10x \cdot (2 - i). \end{aligned}$$

Problema 4**:**(2.5) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função dada por

$$f(z) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + i \cdot e^x \cdot (x \cdot \operatorname{sen} y + y \cdot \cos y)), \; z = x + iy,$$

determine

$$\int_C f(z)\, dz$$

onde C é o círculo de centro em $z = 2018 \cdot i$ e raio $R = 1$ orientado positivamente.

Solução: Seja $z = x + iy$ observe que

$$\begin{aligned} z \cdot e^z =&(x+iy)e^{x+iy} = (x+iy)e^x \cdot e^{iy} \\ =&e^x(x+iy)(\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y) \\ =&e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y + i \cdot x \cdot \operatorname{sen} y + i \cdot y \cdot \cos y) \\ =&e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y) + i \cdot e^x \cdot (x \cdot \operatorname{sen} y + y \cdot \cos y) \\ =&f(z). \end{aligned}$$

Como as aplicações $z \mapsto z$ e $z \mapsto e^z$ são funções inteiras então a função $f(z)$, que é produto destas, também é uma função inteira. Em particular f é analítica sobre a curva C e em seu interior. Como C é uma curva regular fechada simples segue pelo Teorema de Cauchy-Goursat que

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Problema 5**:**(2.5) Seja C qualquer contorno fechado simples, positivamente orientado, e seja

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3} ds.$$

Mostre que $g(z) = 6\pi i z$ quando z está dentro de C e que $g(z) = 0$ quando z está fora.

Solução: Consideremos $f(s) := s^3 + 2s$. Como f é uma função polinômial f é inteira, portanto, analítica sobre C e dentro de C. Agora há duas possibilidades. Suponhamos que z está dentro de C. Neste caso, pelo Teorema da Fórmula da integral de Cauchy generalizada, temos que

$$\frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^{2+1}} ds = f''(z) = 6z.$$

Logo

$$g(z) = \int_C \frac{s^3+2s}{(s-z)^3}ds = \frac{2\pi i}{2}6z = 6\pi i z,$$

mostrando o que queríamos para o caso de z ser interior a C. Suponhamos agora que z está no exterior de C. Neste caso a função $s \mapsto (s-z)^3$ não se anula no interior e nem sobre C e, portanto, a função

$$s \mapsto \frac{s^3+2s}{(s-z)^3}$$

é analítica sobre C e em seu interior. Consequentemente pelo Teorema de Cauchy-Goursat temos que

$$g(z) = \int_C \frac{s^3+2s}{(s-z)^3}ds = 0,$$

se z é exterior a C. $\square$.

Problema 6**:** Determine a expansão em série de potências de

$$f(z) = \frac{i}{(z-2i)(z-i)}$$

na região:

a) (1.25) $|z| < 1$.

b) (1.25) $1 < |z| < 2$.

Solução: Primeiramente utilizamos frações parciais para escrever $f(z)$ em uma forma mais amigável. Sejam A e B reais tais que

$$\frac{i}{(z-2i)(z-i)} = \frac{A}{z-2i} + \frac{B}{z-i}$$

temos

$$\frac{i}{(z-2i)(z-i)} = \frac{(A+B)\cdot z - i\cdot A - 2i\cdot B}{(z-2i)(z-i)} \Rightarrow i = (A+B)\cdot z - i\cdot A - 2i\cdot B$$

$$\Rightarrow 0 = A+B \quad \text{e} \quad i = -i\cdot A - 2i\cdot B.$$

A primeira equação nos dá $B = -A$. Substituindo na segunda temos $i = -iA + 2iA = A \cdot i \Rightarrow A = 1$, logo $B = -1$. Assim,

$$f(z) = \frac{1}{z-2i} + \frac{1}{i-z}.$$

a) Se $|z| < 1$ então

$$|z/2i| = |z|/2 < 1/2 < 1 \quad \text{e} \quad |z/i| = |z| < 1.$$

Assim, utilizando a expansão em séries

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w| < 1,$$

temos:

- $$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{2i(\frac{z}{2i}-1)} = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2i}} = -\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n i^n} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1} i^{n+1}}.$$

- $$\frac{1}{i-z} = \frac{1}{i(1-\frac{z}{i})} = \frac{1}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}}.$$

Portanto concluímos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1} i^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\frac{1}{i^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1} i^{n+1}} \right), \quad |z| < 1.$$

b) Para $1 < |z| < 2$ ainda temos $|z/2i| = |z|/2 < 2/2 = 1$ logo a primeira série calculada no item (a) permanece a mesma, ou seja,

$$\frac{1}{z-2i} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1} i^{n+1}}.$$

Agora, como $1 < |z|$ então $|i/z| = 1/|z| < 1$. Logo,

$$\frac{1}{i-z} = \frac{1}{z(\frac{i}{z}-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{i}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{z^{n+1}}.$$

Assim

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1} i^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{z^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2.$$

Problema 7.(2.5) Utilizando o Teorema dos resíduos de Cauchy calcule a integral

$$\int_C \frac{z^4+1}{z(z-i)} dz$$

onde C é o círculo de centro em $z_0 = 1$ e raio $R = 4$ orientado positivamente.

Solução: Primeiramente observemos que as singularidades de $f(z) = \frac{z^4+1}{z(z-i)}$ são $z_0 = 0$ e $z_1 = i$. Vamos mostrar que ambas são polos simples de f.

- Observe que $f(z) = \frac{\phi_0(z)}{z}$ onde $\phi_0(z) := \frac{z^4+1}{z-i}$. Agora ϕ_0 é uma função analítica em $z_0 = 0$ (pois a única singularidade de $\phi_0(z)$ é $z_1 = i$) e além disso $\phi_0(0) = \frac{1}{-i} \neq 0$. Por um teorema visto em sala concluímos que $z_0 = 0$ é um polo simples de f e o resíduo em $z_0 = 0$ é dado por:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \phi_0(0) = -\frac{1}{i} = i.$$

- Observe que $f(z) = \frac{\phi_1(z)}{z-i}$ onde $\phi_1(z) := \frac{z^4+1}{z}$. Agora ϕ_1 é uma função analítica em $z_1 = i$ (pois a única singularidade de $\phi_1(z)$ é $z_0 = 0$) e além disso $\phi_1(i) = \frac{i^4+1}{i} = \frac{2}{i} \neq 0$. Por um teorema visto em sala concluímos que $z_1 = i$ é um polo simples de f e o resíduo em $z_1 = i$ é dado por:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \phi_1(i) = \frac{2}{i} = -2i.$$

Pelo Teorema dos resíduos de Cauchy temos

$$\int_C \frac{z^4+1}{z(z-i)} dz = 2\pi \cdot i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \right) = 2\pi \cdot i(i - 2i) = -2\pi \cdot i^2 = 2\pi.$$

Boa Prova !!