Matemática IV 2018- Avaliação 3

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	B	Total

Instruções:

- **Horário de início: 19:00h   Horário de encerramento: 20:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos ou for identificada qualquer forma de cola ou fraude a avaliação será anulada;
- Indique quais questões você escolheu circulando o número da questão na tabela acima;
- Coloque **APENAS** o RA em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Matemática IV 2018- Avaliação 3

Prof. Gabriel Ponce

Resolva o problema 1**.**

Problema 1**:** Determine a expansão em série de potências de

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$$

na região:

a) (1.5) $|z| < 1$.

b) (1.5) $1 < |z| < 2$.

Escolha DOIS dentre os problemas $2-4$**.**

Problema 2**:**

a) (1.0) Defina os três tipos de singularidades isoladas (essencial, removível e polo de ordem m).

b) (1.5) Classifique todas as singularidades da função (ou seja, para cada singularidade determine em qual dos três tipos ela se encaixa):

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + e^{\frac{1}{3-z}}.$$

Problema 3**:**

a) (1.25) Utilizando séries, mostre que a função f definida através da equação

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}, \quad \text{quando} \quad z \neq 0$$

$$f(z) = 1, \quad \text{quando} \quad z = 0$$

é inteira.

b) (1.25) Diferenciando a série de potências de $1/(1-z)$ mostre que

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)z^n, \ |z| < 1.$$

Problema 4**:** (2.5) Utilize resíduo no infinito para calcular

$$\int_C \frac{z^9}{1-z^8}dz$$

onde C é o círculo $|z| = 2$ orientado positivamente.

Resolva o problema 5**.**

Problema 5**.**(2.0) Utilizando o Teorema dos resíduos de Cauchy calcule a integral

$$\int_C \frac{z^{2018}+1}{z(z-1)}dz$$

onde C é o círculo de centro em $z_0 = 1$ e raio $R = 4$ orientado positivamente.

Bônus.(1.0) Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função complexa f. Suponha que para um certo natural não nulo m temos

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m},$$

em que $\phi(z)$ é uma função analítica em z_0 e tal que $\phi(z_0) \neq 0$. Mostre que z_0 é um polo de ordem m e que o resíduo de f em z_0 é dado por

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

onde convencionamos $\phi^{(0)}(z_0) = \phi(z_0)$ e $0! = 1$.

Foi um prazer dar aula para vocês neste semestre

Boa Prova!!