Matemática IV - MA 044
Sexta Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1 Sequências e Séries de Taylor

1. Use a inequação $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$ para mostrar que

$$\text{se } \lim_{n\to+\infty} z_n = z, \quad \text{então} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|.$$

2. Mostre que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

3. Seja $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dê exemplo de uma sequência z_n de números complexos tal que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ e de forma que z_n não converge para z.

4. Substituindo $z = re^{i\theta}$ na série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ mostre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

quando $0 < r < 1$.

5. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ então $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \overline{S}$.

6. Seja c um número complexo. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ então $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS$.

7. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ e $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$ ento $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n + w_n) = S + T$.

8. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos convergindo para algum número complexo z. Mostre que existe $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo $n \geq 0$.

9. Enuncie e demonstre o Teorema da Expansão de Funções Analíticas em Séries de Taylor.

10. Mostre que a série de Taylor da função $f(z) = e^z$ ao redor do ponto $z_0 = 1$ é dada por

$$e^z = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}, \quad |z-1| < \infty.$$

11. Determine a Série de Maclaurin da função

$$f(z) = \frac{z}{z^4+9}.$$

12. Calcule a série de Maclaurin da função $f(z) = \operatorname{sen}(z^2)$.
Obs: não se esqueça que em aula obtivemos a série de sen, o que pode ser usado neste exercício.

13. Mostre que quando $z \neq 0$,

a) $\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + ...;$

b) $\frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + ...$

14. Mostre que quando $0 < |z| < 4$ temos

$$\frac{1}{4z-z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+2}}.$$

2 Séries de Laurent

15. Encontre a série de Laurent que representa a função

$$f(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

no domínio $0 < |z| < \infty$.

16. Mostre que

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{e}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+2)!} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

quando $0 < |z+1| < \infty$.

17. Encontre uma representação para a função

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+(1/z)}$$

em potências negativas de z que é válida quando $1 < |z| < \infty$.

18. Apresente duas séries de Laurent em potências de z para a função

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

e especifique as regiões nas quais essas expansões são válidas.

19. Mostre que quando $0 < |z-1| < 2$ temos

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2(z-1)}.$$

20.

a) Seja a um número real com $-1 < a < 1$, mostre que

$$\frac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$$

para $|a| < |z| < \infty$.

b) Substitua $z = e^{i\theta}$ na equação obtida na parte (a). Iguale as partes reais de ambos os lados e depois a parte imaginária de ambos os lados para provar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(n\theta) = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{a\operatorname{sen}(\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2},$$

onde $-1 < a < 1$.

3 Continuidade, analiticidade, integração e diferenciação de séries de potências

21. Diferenciando a série de MacLaurin

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

obtenha as expansões

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad , |z| < 1$$

e

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n \quad , |z| < 1.$$

22. Substituindo $1/(1-z)$ por z na expansão

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad , |z| < 1$$

encontrada no exercício anterior, obtenha a representação em série de Laurent

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(z-1)^n}, \quad 1 < |z-1| < \infty.$$

23. Encontre a série de Taylor da função

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

ao redor do ponto $z_0 = 2$. Diferenciando a série obtida termo a termo determine a série de Taylor de $g(z) = z^{-2}$ ao redor de $z_0 = 2$.

24. Utilizando séries, mostre que a função f definida através da equação

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}, \quad \text{quando} \quad z \neq 0$$

$$f(z) = 1 \quad \text{quando} \quad z = 0$$

é inteira. Use este resultado para mostrar que

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1.$$

25. Integre a expansão em série de Taylor

$$\frac{1}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (w-1)^n, \quad |w-1| < 1$$

ao longo de um contorno interior ao círculo de convergência de $w = 1$ a $w = z$ para obter a representação

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \quad |z-1| < 1.$$