Matemática IV - MA 044
Quinta Lista - Parte 2

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1. Calcule a integral de f sobre o círculo unitário C dado por $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, onde $f(z)$ é o ramo:

$$z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z], \quad |z| > 0, 0 < \arg(z) < 2\pi$$

da função indicada.
2. Sejam C_0 e C os círculos

$$z = z_0 + Re^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

e

$$z = Re^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

respectivamente. Dada qualquer função f contínua sobre C mostre que

$$\int_{C_0} f(z - z_0)dz = \int_C f(z)dz.$$

Aplique este fato para provar que

$$\int_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

3. Sem calcular o valor da integral mostre uqe

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2 - 1} dz \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

onde C é o pedaço de arco do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ a $z = 2i$.

4. Seja C o segmento de reta de $z = i$ a $z = 1$. Observando que de todos os pontos neste segmento o ponto médio é o que está mais próximo da origem, mostre que

$$\left|\int_C \frac{1}{z^4} dz\right| \leq 4\sqrt{2},$$

sem calcular a integral.

5. Mostre que se C é a fronteira do triângulo com vértices nos pontos $0, 3i$, e -4 orientada no sentido anti-horário, então

$$\left|\int_C (e^z - \overline{z}) dz\right| \leq 60$$

6. Seja C_R a metade superior do círculo $|z| = R$, $R > 2$, orientado no sentido anti-horário. Mostre que

$$\left|\int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4}\right| \leq \frac{\pi R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}.$$

Depois, divindo o numerador e o denominador do termo do lado direito por R^4 mostre que o valor da integral tende a zero quando $R \to +\infty$.

7. Use antiderivadas para mostrar que para qualquer contorno C que liga um ponto z_1 a um ponto z_2 temos

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}),$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$.

8. Mostre que

$$\int_{-1}^{1} z^i dz = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}(1 - i),$$

onde o integrando denota o ramo principal $z^i = \exp(i \operatorname{Log}(z))$, $|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, e onde o caminho de integração é qualquer contorno de $z = -1$ a $z = 1$ que, exceto pelos seus pontos finais, se encontra acima do eixo real.

9. Use o Teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que

$$\int_C f(z) dz = 0$$

quando o contorno C é o círculo unitário $|z| = 1$, em qualquer direção, e quando

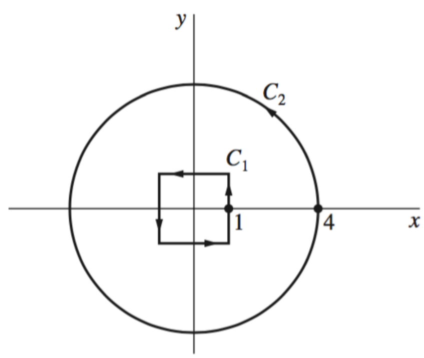
a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$;

b) $f(z) = ze^{-z}$;

c) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$;

d) $f(z) = \text{Log}(z+2)$.

10. Seja C_1 a fronteira, positivamente orientada, do quadrado cujos lados estão sobre as linhas $x = \pm 1, y = \pm 1$ e seja C_2 o círculo positivamente orientado $|z| = 4$.



Mostre que

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

quando

a) $f(z) = \frac{1}{3z^2+1}$;

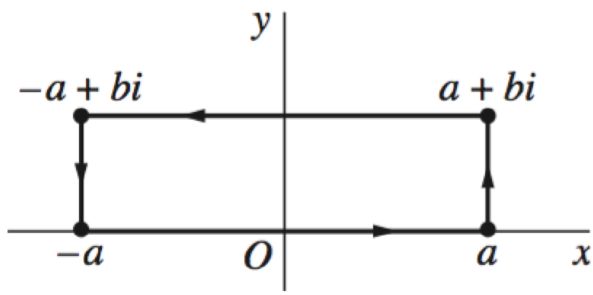
b) $f(z) = \frac{z+2}{\text{sen}(z/2)}$;

c) $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$.

11. Vamos calcular a seguinte integral REAL utilizando variáveis complexas:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}, \quad (b > 0).$$

a) Mostre que a soma das integrais de e^{-z^2} ao longo dos lados horizontais do seguinte caminho retangular pode ser escrita como:



$$2\int_0^a e^{-x^2}dx - 2e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos(2bx)dx$$

e que a soma das integrais ao longo dos lados verticais pode ser escrita como

$$ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{-i2ay}dy - ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}e^{i2ay}dy.$$

Depois, com o Teorema de Cauchy-Goursat, mostre que

$$\int_0^a e^{-x^2}\cos(2bx)dx = e^{-b^2}\int_0^a e^{-x^2}dx + e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\operatorname{sen}(2ay)dy.$$

b) Aceitando o fato que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{pi}}{2}$$

e observando que

$$\left|e^{y^2}\operatorname{sen}(2ay)\right| \leq \int_0^b e^{y^2}dy,$$

obtenha a fórmula de integração desejada no início do problema fazendo $a \to +\infty$ na equação do final da parte (a).

12. Seja C a fronteira, positivamente orientada, do quadrado cujos lados estão sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$. Calcule $\int_C f(z)dz$ onde

a) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z-(\pi i/2)}$;

b) $f(z) = \frac{\cos z}{z(z^2+8)}$;

c) $f(z) = \frac{z}{2z+1}$;

d) $f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z-x_0)^2}$, $(-2 < x_0 < 2)$.

13. Seja C o círculo $|z| = 3$, descrito no sentido positivo. Mostre que se

$$g(z) = \int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - z} ds, \quad |z| \neq 3,$$

então $g(2) = 8\pi i$. Qual é o valor de $g(z)$ quando $|z| > 3$?

14. Seja C qualquer contorno fechado simples, positivamente orientado, e seja

$$g(z) = \int_C \frac{s^3 + 2s}{(s - z)^3} ds.$$

Mostre que $g(z) = 6\pi i z$ quando z está dentro de C e que $g(z) = 0$ quando z está fora.

15. Mostre que se f é analítica dentro e sobre um contorno fechado simples C e z_0 não está sobre C então

$$\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

16. Seja C o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Primeiro mostre que para qualquer constante real a,

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$$

Então escreva esta integral em termos de θ para derivar a seguinte fórmula

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a \operatorname{sen}(\theta)) d\theta = \pi.$$