Matemática IV 2018- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	6	B-1	Total

Instruções:

- **Horário de início: 19:00h   Horário de encerramento: 19:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celular, calculadora ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos a avaliação será anulada;
- Coloque o RA em **TODAS** as folhas;
- Não se esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Matemática IV 2018- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

Escolha o problema 1 OU 2.

Problema 1:

a) (1.5) Seja $w = \frac{1+i}{1-i}$ tome $z = \frac{\sqrt{2}}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \cdot w$. Calcule a **raíz cúbica principal** de z.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$

b) (1.0) Seja C_0 o círculo no plano complexo com centro em $z_0 = i$ e raio $R = 1$, mostre que

$$\left| z^2 - z(2i+1) + i \right| \leq 3, \quad \forall\ z \in C_0$$

Problema 2:

a) (1.0) Seja $w = \frac{1+i}{1-i}$ tome $z = \frac{\sqrt{2}}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \cdot w$. Calcule a **raíz cúbica principal** de z.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$

b) (1.5) Mostre que se c é qualquer raiz n-ésima da unidade, então ou $c = 1$ ou

$$1 + c + c^2 + ... + c^{n-1} = 0.$$

Escolha DOIS dentre os problemas $3 - 5$.

Problema 3:

a) (1.0) Calcule

$$\lim_{z \to \infty} \frac{2018 \cdot z^2(z-1) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{|z|}\right)}{z^3 + z + 1}.$$

b) (1.0) Mostre que não existe

$$\lim_{z \to 0} \frac{\text{Re}(z) \cdot \text{Im}(z)}{|z|^2}.$$

c) (0.5) Calcule

$$\lim_{z\to 2+i} \frac{3+4i-z^2}{(2+i-z)(3z-i)}.$$

Problema 4: (2.5) Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas e $z_0 \in \mathbb{C}$, suponha que exista um inteiro positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0. Mostre que se $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ então

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0.$$

Problema 5: (2.5) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x+iy) = (x+y)^2 + i\cdot(y-x)^2$. Determine todos os pontos onde f é diferenciável e calcule o valor da derivada nesses pontos.

Resolva o problema 6.

Problema 6. (2.5) Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais diferenciáveis em todo ponto, definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = g(x)\cdot y + h(y)\cdot x\cdot i, \text{ onde } z = x+iy.$$

Mostre que se f for uma função derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$ então existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = -K\cdot z\cdot i,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema Bônus. (1.0) Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que $|a| = |b| = |c| = 1$ e $a+b+c = 0$. Prove que a, b e c são vértices de um triângulo equilátero no plano complexo.

Boa Prova!!

Soluções

Problema 1:
a) Observe que

$$w = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{|1-i|^2} = \frac{2i}{2} = i.$$

Logo, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \cdot w = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Observe que

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Assim, seja θ um dos possíveis argumentos de z temos $z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo o **argumento principal** de z é $\theta = 3\pi/4$, o que implica $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Assim, as raízes cúbicas de z são dadas por

$$c_k = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i(\frac{3\pi}{4\cdot 3} + \frac{2k\cdot\pi}{3})} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\cdot\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Portanto a raíz principal é dada quando $k = 0$, ou seja, a raíz principal é:

$$c_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\pi/4 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Primeiramente lembremos que o círculo C pode ser escrito como:

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}.$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned}
z^2 - z(2i+1) + i =&(z-i+i)^2 - (z-i+i)(2i+1) + i\\
=&(z-i)^2 + 2i(z-i) + i^2 - (z-i)(2i+1) - i(2i+1) + i\\
=&(z-i)^2 + (z-i)(2i-2i-1) - 1 - 2\cdot i^2 - i + i\\
=&(z-i)^2 - (z-i) + 1.
\end{aligned}$$

Logo

$$|z^2 - z(2i+1) + i| = |(z-i)^2 - (z-i) + 1|.$$

Pela desigualdade triângular, se $|z-i|=1$ temos:

$$|z^2 - z(2i+1) + i| = |(z-i)^2 - (z-i) + 1| \leq |z-i|^2 + |z-i| + |1| = 3,$$

como queríamos demonstrar.

Problema 2:

a) Igual ao problema 1(a).

b) Seja c uma raíz n-ésima da unidade qualquer, por definição temos $1 = c^n$. Assim,

$$0 = 1 - c^n = (1-c)(c^{n-1} + c^{n-2} + ... + c + 1).$$

Logo, ou $1-c=0$ ou $c^{n-1}+c^{n-2}+...+c+1=0$. Assim, $c=1$ ou $c^{n-1}+c^{n-2}+...+c+1=0$. $\square$

Problema 3:

a) Considere $f(z) := \frac{2018\cdot z^2(z-1)+i\cdot \text{sen}\left(\frac{1}{|z|}\right)}{z^3+z+1}$. Por um teorema visto em sala sabemos que

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w.$$

Basta então calcular $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{z\to 0} \frac{2018\cdot \frac{1}{z^2}(\frac{1}{z}-1) + i\cdot \text{sen}(|z|)}{\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+1} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{2018\cdot \frac{1}{z^3}(1-z) + i\cdot \text{sen}(|z|)}{\frac{1+z^2+z^3}{z^3}} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{2018\cdot (1-z) + z^3\cdot i\cdot \text{sen}(|z|)}{1+z^2+z^3} \\
&= \frac{2018(1-0)+0}{1+0+0} = 2018.
\end{aligned}$$

Assim, pelo teorema mencionado, concluimos que o limite dado é igual a 2018.

b) Tomaremos duas formas de convergência a 0 que nos dariam valores diferentes para o limite. Consideremos $z \to 0$ pelo eixo real, ou seja, $z = x + iy$ com

$y = 0$ e $x \to 0$. Neste caso

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z)}{|z|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

Consideremos agora $z \to 0$ na diagonal, ou seja, $z = x + iy$ com $x = y$ e $x \to 0$. Neste caso,

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z)}{|z|^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto o limite não existe. $\square$

c) Observe que $(2 + i + z)(2 + i - z) = (2 + i)^2 - z^2 = 3 + 4i - z^2$. Então

$$\frac{3 + 4i - z^2}{(2 + i - z)(3z - i)} = \frac{(2 + i + z)(2 + i - z)}{(2 + i - z)(3z - i)} = \frac{2 + i + z}{3z - i}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2+i} \frac{3 + 4i - z^2}{(2 + i - z)(3z - i)} = \lim_{z\to 2+i} \frac{2 + i + z}{3z - i} &= \frac{2 + i + 2 + i}{3(2 + i) - i} \\ &= \frac{2 + i}{3 + i} = \frac{(2 + i)(3 - i)}{10} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{10} i.\end{aligned}$$

Problema 4.

Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)g(z) - 0| < \varepsilon.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ qualquer e considere V a vizinhança de z_0 na qual $|g(z)| \leq M$, $\forall z \in V$. Como $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Como $z_0 \in V$, existe δ_1 tal que $B(z_0, \delta_1) \subset V$. Tome $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Assim, se $0 < |z - z_0| < \delta$ então $|g(z)| \leq M$ e $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{M}$, logo

$$|f(z) \cdot g(z)| = |f(z)||g(z)| \leq |f(z)| \cdot M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Logo $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$ como queríamos demonstrar.

Problema 5.
Seja $f(x+iy) = (x+y)^2 + i\cdot(y-x)^2$, então $u(x,y) = x^2+2xy+y^2$ e $v(x,y) = y^2-2xy+x^2$. Observe que u e v são diferenciáveis em qualquer ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Além disso as derivadas parciais u_x, u_y, v_x e v_y existem em todos os pontos e são dadas por:

$$u_x = 2x+2y, \quad u_y = 2x+2y, \quad v_x = -2y+2x, \quad v_y = 2y-2x$$

que também são contínuas em qualquer ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Finalmente, pelo Teorema de condições suficientes para diferenciabilidade para verificar a derivabilidade de f em um ponto (x,y) basta verificarmos em quais pontos as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Se

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x$$

então

$$2x+2y = 2y-2x \quad \text{e} \quad 2x+2y = 2y-2x \Rightarrow x = 0.$$

Logo, as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas em todos os pontos $(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$. Assim, f é derivável em todo $z = y\cdot i$, ou seja, em todo $z\in\mathbb{C}$ com $Re(z) = 0$. Em $z = y\cdot i$ temos

$$f'(z) = u_x(0,y) + iv_x(0,y) = 2y + i\cdot(-2y) = 2y(1-i) = -2z\cdot i(1-i)$$

$$\Rightarrow f'(z) = -z(2+2i).$$

Problema 6. Seja

$$f(z) = g(x)\cdot y + h(y)\cdot x\cdot i, \text{ onde } z = x+iy,$$

uma função inteira, então f é diferenciável em todo ponto z. Portanto, f deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann em todo ponto. Seja $u(x,y) = g(x)\cdot y$ e $v(x,y) = h(y)\cdot x$ temos

$$u_x = g'(x)y, \quad u_y = g(x)$$

$$v_x = h(y), \quad v_y = h'(y)x.$$

Logo $u_y = -v_x$ implica que $g(x) = -h(y)$. Como as equações de Cauchy-Riemann acontecem em todo ponto então temos

$$g(x) = -h(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Fixe $y = 0$ e chame $K = -h(0)$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $g(x) = -h(0) = K$, logo g é constante igual a K. Analogamente, fixe $x = 0$. Então, para todo $y \in \mathbb{R}$ temos $h(y) = -g(0) = -K$, logo h é constante igual a $-K$. Assim concluímos que

$$f(z) = g(x)y + h(y)xi = K(y - xi) = K(x + iy) \cdot (-i) = -Kz \cdot i,$$

com K constante, como queríamos demonstrar. $\square$

Problema Bônus. Consideremos $|a| = |b| = |c| = 1$ satisfazendo $a + b + c = 0$. Observe que $c \neq 0$, então podemos multiplicar ambos os lados da equação por c^{-1} :

$$ac^{-1} + bc^{-1} + 1 = 0.$$

Chame $\alpha = ac^{-1}, \beta = bc^{-1}$. Então $\alpha + \beta = -1$. Seja $\alpha = x + iy$, $\beta = p + iq$ então

$$(x + p) + i(y + q) = -1 \Rightarrow x + p = -1 \quad \text{ e } y + q = 0.$$

Como $|\alpha| = |\beta| = 1$ temos $x^2 + y^2 = p^2 + q^2 = 1$. Substituindo p por $-1 - x$ e q por $-y$ temos:

$$1 = (-1 - x)^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2 + y^2 = 2 + 2x \Rightarrow x = -1/2.$$

Logo $p = -1 - x = -1/2$. Então $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $q = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, $\alpha, \beta, 1$ são os vértices do triângulo equilátero formado pelos complexos $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Multiplicando esses vértices por $c = e^{i\theta}$ temos os complexos: $e^{i\theta}, e^{i(\frac{2\pi}{3}+\theta)}, e^{i(\frac{4\pi}{3}+\theta)}$, que também são vértices de um triângulo equilátero pois cada dois consecutivos tem um ângulo de $2\pi/3$ entre si. $\square$