Matemática IV 2018- Avaliação 1

Prof. Gabriel Ponce

RA (Legível) :

1	2	3	4	5	6	B-1	Total

Instruções:

- **Horário de início: 19:00h   Horário de encerramento: 19:55h.**
- Esta avaliação é individual e não é permitido uso de celulares, calculadoras ou qualquer aparelho eletrônico. Caso o(a) aluno(a) fizer uso destes recursos a avaliação será anulada;
- Coloque o RA em **TODAS** as folhas;
- Não esqueça de verificar as hipóteses dos teoremas necessários antes de aplica-los;
- Justifique bem suas soluções;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.

Escolha o problema 1 OU 2.

Problema 1:

a) (1.5) Seja $w = \frac{1+i}{1-i}$ tome $z = \frac{\sqrt{2}}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \cdot w$. Calcule a **raíz cúbica principal** de z.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$

b) (1.0) Seja C_0 o círculo no plano complexo com centro em $z_0 = i$ e raio $R = 1$, mostre que

$$\left|z^2 - z(2i+1) + i\right| \leq 3, \quad \forall\ z \in C_0$$

Problema 2:

a) (1.0) Seja $w = \frac{1+i}{1-i}$ tome $z = \frac{\sqrt{2}}{2}w + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \cdot w$. Calcule a **raíz cúbica principal** de z.
Obs: coloque o resultado final na forma $x + iy$

b) (1.5) Mostre que se c é qualquer raiz n-ésima da unidade, então ou $c = 1$ ou

$$1 + c + c^2 + ... + c^{n-1} = 0.$$

Escolha DOIS dentre os problemas $3 - 5$.

Problema 3:

a) (1.0) Calcule

$$\lim_{z \to \infty} \frac{2018 \cdot z^2(z-1) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|z|}\right)}{z^3 + z + 1}.$$

b) (1.0) Calcule

$$\lim_{z \to 2+i} \frac{3 + 4i - z^2}{(2 + i - z)(3z - i)}.$$

c) (0.5) Mostre que não existe

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)}{|z|^2}.$$

Problema 4: (2.5) Sejam $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas e $z_0 \in \mathbb{C}$, suponha que exista um inteiro positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0. Mostre que se $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ então

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0.$$

Problema 5: (2.5) Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x + iy) = (x + y)^2 + i \cdot (y - x)^2$. Determine todos os pontos onde f é diferenciável e calcule o valor da derivada nesses pontos.

Resolva o problema 6.

Problema 6. (2.5) Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais diferenciáveis em todo ponto, definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = g(x) \cdot y + h(y) \cdot x \cdot i, \text{ onde } z = x + iy.$$

Mostre que se f for uma função derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$ então existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = -K \cdot z \cdot i,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Problema Bônus. (1.0) Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que $|a| = |b| = |c| = 1$ e $a + b + c = 0$. Prove que a, b e c são vértices de um triângulo equilátero no plano complexo.

Boa Prova!!