Matemática IV - MA 044
Segunda Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1. Defina

- ε-vizinhança de um ponto;
- Ponto interior de um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$;
- Conjunto aberto;
- Ponto de fronteiro;
- Fecho de um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$;
- Pontos de acumulação de um conjunto S.

2. Mostre que um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ é aberto se, e somente se, todo ponto em S é ponto interior de S.

3. Mostre que um conjunto finito de pontos $z_1, z_2, ..., z_n$ não pode ter nenhum ponto de acumulação.

4. Determine os pontos de acumulação dos seguintes conjuntos:

1. $z_n = i^n$, $n = 1, 2, ...$;
2. $0 \leq \operatorname{Arg} z < \pi/2$, $z \neq 0$.

5. Escreva a função $f(z) = z^3 + z + 1$ na forma$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

6. Seja $f : S \to \mathbb{C}$ uma função complexa dada por

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Sejam $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = u_0 + iv_0$, mostre que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x_0,y_0) =& u_0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x_0,y_0) =& v_0. \end{aligned}$$

7. Escreva a função

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

na forma $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.

8. Mostre que

a) $\lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0)$;

b) $\lim_{z\to z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$;

c) $\lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z}^2}{z} = 0$.

9. Calcule

$$\lim_{z\to 1-i} [x + i(2x+y)].$$

10. Calcule

$$\lim_{z\to i} \frac{iz^3 - 1}{z+i}.$$

Observação: Deixe bem claro quais resultados são utilizados para calcular este limite.

11. Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2.$$

12. Seja $\Delta z := z - z_0$. Mostre que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta z \to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0.$$

13. Mostre que

$$\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = 0 \text{ se } \lim_{z \to z_0} f(z) = 0$$

e se existe um inteiro positivo M tal que $|g(z)| \leq M$ para todo z em alguma vizinhança de z_0.

14. Calcule

a) $\lim_{z \to \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$;

b) $\lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-1)^3}$;

c) $\lim_{z \to \infty} \frac{z^2+1}{z-1}$.