Exemplo. Fibrados unitários

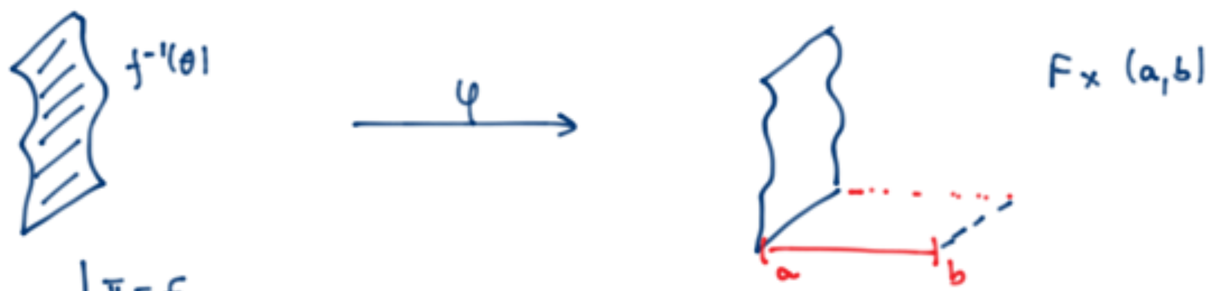
Sejam $\langle \cdot,\cdot \rangle$ métrica Riemanniana em M^n e $T^1M = \{(p, v_p) : v_p \in T_pM, \|v_p\| = 1\}$

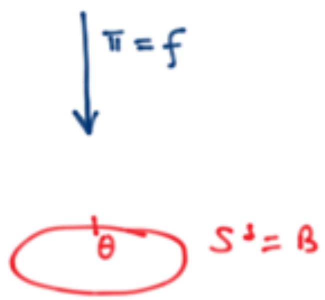
Então (T^1M, π, M, S^{n-1}) é um espaço fibrado cujas fibras são $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

[Ex]

Exemplo. Se M é compacta, conexa e $\mathcal{F}$ é transv. orientável com codim um e uma folha F compacta com grupo fundamental finito. Então as folhas de $\mathcal{F}$ são as fibras de um espaço fibrado com base S^1, fibra F e grupo estrutural discreto.

De fato, pelo Teo. de estabilidade completa existe uma submersão $f: M \to S^1$ tal que as folhas são $f^{-1}(\theta)$, $\theta \in S^1$





$\varphi : \pi^{-1}(a,b) \longrightarrow F \times (a,b)$

pode ser construída usando o Lema que mostra que ao redor de F há uma vizinhança saturada difeomorfa a $(-1,1) \times F$.

– Folheações Transversais às fibras de um fibrado.

Seja $\pi : E \to B$ a projeção de um fibrado com fibra F.
Dizemos que $\mathcal{F}$ é transversal às fibras de E quando:

1) $\forall\, p \in E$, $\mathcal{F}(p)$ é transversal à fibra $F_{\pi(p)} = \pi^{-1}(\pi(p))$ e

$$\dim(\mathcal{F}) + \dim(F) = \dim(E).$$

2) Para toda folha L de $\mathcal{F}$, $\pi|L : L \to B$ é uma aplicação de recobrimento.

Proposição: Suponhamos que a fibra F é compacta. Neste caso (a) $\Rightarrow$ (b).

prova. Seja L uma folha de $\mathcal{F}$. Como $\pi : E \to B$ é uma submersão, L é transversal às fibras e $\dim(L) = \dim(B)$, segue que $\pi|L : L \to B$ é um difeo local.

Para provarmos que $\pi|L$ é recobrimento basta provarmos que $\forall\, b \in B$, existe um disco $\mathcal{U} \subset B$ com $b \in \mathcal{U}$ tal que p/ cada $x \in \mathcal{U}$ a fibra $\pi^{-1}(x)$ corta cada folha de $\mathcal{F}|\pi^{-1}(\mathcal{U})$ em exatamente um ponto.

Afirmação: dado $z \in \pi^{-1}(b)$ existe uma vizinhança trivializadora W_z de $\mathcal{F}$, tal que, $\forall\, x \in \pi(W_z)$, $\pi^{-1}(x)$ corta cada placa de W_z em exatamente um ponto.

prova. Seja L_z a folha de $\mathcal{F}$ por $z \in \pi^{-1}(b)$. Como z é ponto isolado de $\pi^{-1}(b) \cap L_z$ na topologia intrínseca de L_z, existe um disco $z \in D \subset L_z$ tal que para todo $y \in D$, a fibra $\pi^{-1}(\pi(y))$ corta D em y.

Isto implica que
$$h : \pi^{-1}(\pi(D)) \longrightarrow D, \quad y \longmapsto \pi^{-1}(\pi(y)) \cap D$$
é uma submersão e $h(D) = D$. Podemos escolher D de forma que $\bar{D}$ está numa placa de uma vizi. trivializadora $\tilde{\omega}$ de $\mathcal{F}$.

Assim podemos construir uma vizi. trivializadora ω_z de $\mathcal{F}$ tal que
$$\omega_z \subset \tilde{\omega} \cap \pi^{-1}(\pi(D))$$
e as placas de ω_z cortam cada $\pi^{-1}(x)$ em exatamente um pto se $x \in \pi(D)$ ▲

Como $\pi^{-1}(b)$ é compacto, podemos tomar uma cobertura finita $(\omega_i = \omega_{z_i})_{i=1}^{j}$ de $\pi^{-1}(b)$.
Assim $\bigcap_{i=1}^{k} \pi(\omega_i)$ é vizinhança de b em B. Seja $\mathcal{U} \subset \bigcap_{i=1}^{k} \pi(\omega_i)$ um disco que contém b. Se J é uma folha de $\mathcal{F}|\pi^{-1}(\mathcal{U})$, então J está contida em alguma placa de ω_i, p/ algum $i \in \{1, \dots, k\}$.

Assim $\pi|J : J \to \mathcal{U}$ é biunívoca. Mas J é uma folha de $\mathcal{F}|\pi^{-1}(\mathcal{U})$
$\therefore$ $\pi(J) = \mathcal{U}$. Logo, $\pi|J : J \to \mathcal{U}$ é difeo ■

– Holonomia de $\mathcal{F}$.

Quando $\mathcal{F}$ é uma folheação C^r $(r \geq 1)$ transversal às fibras de E existe uma representação

$$\varphi : \pi_1(B,b) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(F) \simeq \mathrm{Diff}^r(\pi^{-1}(b))$$

denominada **holonomia de $\mathcal{F}$.**

- Sejam $\alpha : I \longrightarrow B$, $\alpha(0) = \alpha(1) = b$ e $y \in \pi^{-1}(b)$. Como $\pi|L_y : L_y \longrightarrow B$ é um recobrimento, existe um único caminho

$$\tilde{\alpha}_y : I \longrightarrow L_y \text{ tal que } \tilde{\alpha}_y(0) = y \text{ e } \pi \circ \tilde{\alpha}_y = \alpha^{-1}.$$

Identificando $\pi^{-1}(b)$ com F podemos definir uma aplicação $\varphi_\alpha : F \longrightarrow F$ por $\varphi_\alpha(y) := \tilde{\alpha}_y(1)$.

- Como o ponto final da curva $\tilde{\alpha}_y$ só depende da classe de homotopia de α^{-1}, segue-se que $\varphi_\alpha(y)$ só depende da classe de homotopia de α^{-1} e podemos escrever

$$\varphi_\alpha = \varphi_{[\alpha]}.$$

Propriedades: • $\varphi_{[\alpha]}^{-1} = (\varphi_{[\alpha]})^{-1}$ • $\varphi_{[\alpha]}$ é difeo C^r.

• Se $[\beta] \in \pi_1(B)$, $\varphi_{[\alpha * \beta]} = \varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}$.

Assim $\varphi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(F)$ é um homomorfismo de grupos.

$$\varphi([\alpha]) = \varphi_{[\alpha]}$$

- Suspensão de uma Representação

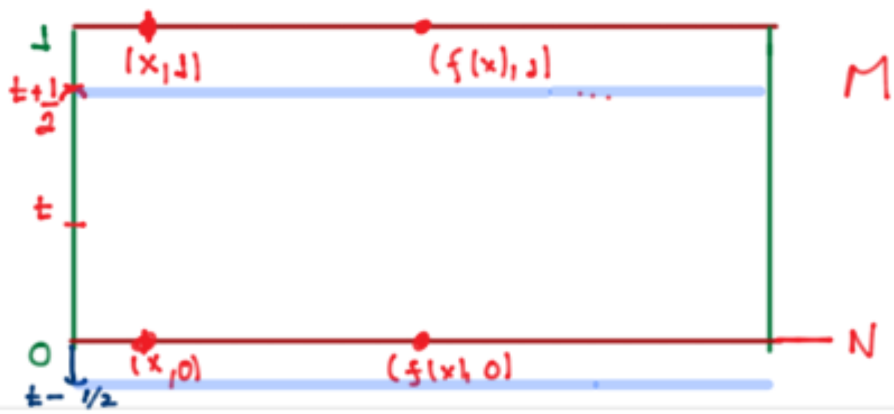
<u>Exemplo</u>. (Suspensão de um difeomorfismo).

Considere $f : N \to N$ um difeo C^r ($r \geq 1$). Considere, no produto, $N \times \mathbb{R}$ a seguinte relação de equivalência:

$$(x, t) \sim (x', t') \Leftrightarrow t - t' = n \in \mathbb{Z} \text{ e } x' = f^n(x).$$

Assim, se $g(x,t) = (f^{-1}(x), t+1)$ então g é um difeo C^r e $(x,t) \sim (x', t')$ $\Leftrightarrow (x', t') = g^n(x,t)$ p/ algum $n \in \mathbb{Z}$.

Sejam $M = N \times \mathbb{R}/_\sim$ o espaço quociente, com a topologia quociente, e $\pi : N \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ a projeção da rel. de equivalência



- Tomando $V = N \times (t - 1/2, t + 1/2)$, $y = \pi(x,t) \in M$ e $\pi(V) = \mathcal{U}$.

É fácil ver que $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, sendo que $V_n = g^n(V)$ e que:

$\pi | V_n : V_n \to \mathcal{U}$ é homeomorfismo $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Portanto $\pi : N \times \mathbb{R} \to M$ é uma aplicação de recobrimento. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{Z}$ tem-se que

$$g^n = (\pi | V_n)^{-1} \circ \pi : V \longrightarrow V_n \text{ é difeo } C^r.$$

Portanto M tem estrutura de variedade C^r tal que π é difeo local C^r e $\dim M = \dim N + 1$.

Agora vamos definir uma folheação $\mathcal{F}$ em M. Em $N \times \mathbb{R}$ considere a folheação C^r, $\mathcal{F}_0$ cujas folhas são as linhas $\{x\} \times \mathbb{R}$, $x \in N$, a qual é tangente ao campo de vetores $X^0(x,t) = (0,1)$ em $N \times \mathbb{R}$. Esta folheação e o campo X_0 são invariantes por g, isto é:

$$g(\mathcal{F}_0(x)) = \mathcal{F}_0 \quad \text{e} \quad (Dg)^{-1} \cdot (X^0 \circ g) = X^0.$$

Assim podemos tomar uma folheação $\mathcal{F}$ e um campo X em M tais que:

$$\mathcal{F}_0 = \pi^*(\mathcal{F}) \quad , \quad X^0 = \pi^*(X).$$

As curvas integrais de X são as folhas de $\mathcal{F}$. A folheação $\mathcal{F}$ é chamada suspensão do difeomorfismo f e o campo X, campo suspensão de f.

Problema [Caso geral] Dadas duas variedades F, B e uma representação $\varphi : \pi_1(B) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(F)$ determinar uma variedade $E(\varphi)$, fibrada sobre B com fibra F, e uma folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ transversal às fibras de E tais que a holonomia de $\mathcal{F}(\varphi)$ seja φ.

Teorema. (Suspensão de representações)

Sejam B e F variedades conexas e $\varphi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(F)$ uma representação. Então existem um espaço fibrado $(E(\varphi), \pi, B, F)$ e uma folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ transversal às fibras de $E(\varphi)$ cuja holonomia é φ.

O fibrado $E(\varphi)$ tem grupo estrutural discreto.

Exemplo. Coloquemos $B = \mathbb{T}^2$ e $F = S^1$. Temos que $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$. Logo uma representação $\varphi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathrm{Dif}^r(S^1)$ é determinada por dois difeos de S^1,

$$f = \varphi(1,0) \quad \text{e} \quad g = \varphi(0,1).$$

$\cdot$ f e g comutam $[\, f \circ g = \varphi(1,0) \circ \varphi(0,1) = \varphi((1,0)+(0,1)) = \varphi((0,1)+(1,0))$

$$= g \circ f \,].$$

Suponhamos que f preserva orientação de S^1 mas g não.

Vamos construir a suspensão de φ. Em $I^2 \times S^1$ consideremos a folheação $\mathcal{F}_1$ cujas folhas são $I^2 \times \{\theta\}$, $\theta \in S^1$

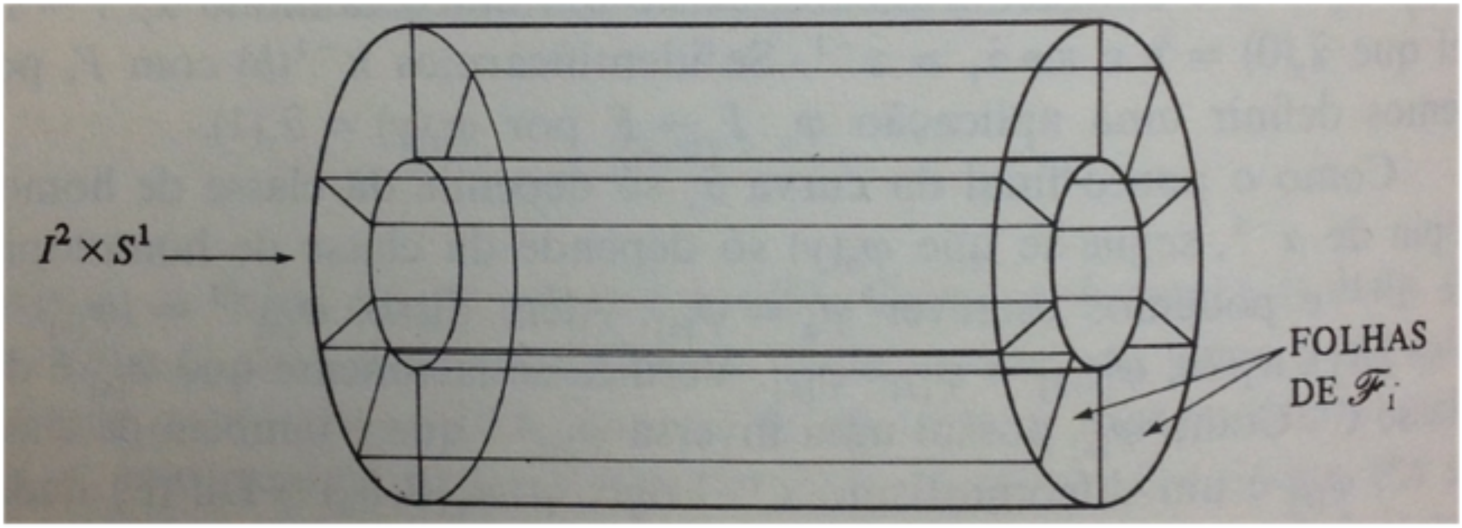


figura retirada do Camacho - Lins, Neto.

- Consideremos agora a seguinte relação de equivalência:

$$(x, y, \theta) \sim (x', y', \theta') \text{ em } I^2 \times S^1 \Leftrightarrow$$

1) $x = 0$, $x' = 1$, $y = y'$ e $\theta = f(\theta')$ ou
2) $x = x'$, $y = 0$, $y' = 1$ e $\theta = g(\theta')$.

- Fazendo a identificação 1 a variedade se torna $I \times \mathbb{T}^2$ e $\mathcal{F}_1$ induz uma folheação $\mathcal{F}_2$ transversal ao bordo cuja holonomia é dada por f.

- Fazendo em $I \times \mathbb{T}^2$ a identificação 2 obtemos uma variedade não orientável $E(\varphi)$ fibrada sobre $\mathbb{T}^2$ com fibra S^1.

A folheação $\mathcal{F}_2$ induz uma folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ de $E(\varphi)$.

Além disso $\mathcal{F}(\varphi)$ é transversal às fibras de $E(\varphi)$ e cada folha é homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}\times S^1$ ou $\mathbb{T}^2$.

definição: Dizemos que duas representações $\varphi: \pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Diff}(F)$ e $\varphi': \pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Diff}^r(F')$ são C^s conjugadas se existe um difeomorfismo C^s (caso $s \geq 1$) ou homeomorfismo ($s=0$), $h: F \to F'$ tal que, para todo $[\alpha] \in \pi_1(B, b_0)$ temos:

$$\varphi([\alpha]) = h^{-1} \circ \varphi'([\alpha]) \circ h.$$

Teorema. Sejam φ e φ' representações C^s conjugadas. Existe um difeomorfismo C^s, $H: E(\varphi) \to E(\varphi')$ (homeo se $s=0$) tal que:

a) $\pi' \circ H = \pi$ e, consequentemente H leva fibras de $E(\varphi)$ em fibras de $E(\varphi')$.

b) H leva folhas de $\mathcal{F}(\varphi)$ sobre folhas de $\mathcal{F}(\varphi')$.

Suponhamos agora que (E, π, B, F) é um espaço fibrado e que $\mathcal{F}$ é uma folheação em E transversal às fibras.
Seja φ a holonomia de $\mathcal{F}$ (com relação à fibra $\pi^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B$).

Pergunta. Como se relaciona a folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ em $(E(\varphi), \pi_\varphi, B, F)$ com a folheação $\mathcal{F}$?

Teorema. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação C^r $(r \geq 1)$ transversal às fibras do fibrado (E, π, B, F), cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B$, é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \to \mathrm{Diff}^r(F)$. Então existe um difeo. C^r, $H : E \to E(\varphi)$ que leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{F}(\varphi)$ e tal que $\pi_\varphi \circ H = \pi$.

Em particular, H leva fibras de E em fibras de $E(\varphi)$.

definição: Dizemos que os espaços fibrados (E, π, B, F) e (E', π', B, F) são equivalentes (C^r) se existe um difeo. C^r, $H : E \to E'$ tal que

$$\pi' \circ H = \pi .$$

Se o fibrado for vetorial pedimos tb que H leve fibra em fibra de forma linear.

Teorema. Seja (E, π, B, F) um espaço fibrado. Então existe uma folheação em E transversal às fibras se, e somente se, (E, π, B, F) é equivalente a um fibrado com grupo estrutural discreto.

prova. Suponhamos que exista $\mathcal{F}$ transversal às fibras de E. Seja $\varphi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(F)$ a holonomia de $\mathcal{F}$. Então, pelo Teorema anterior (E, π, B, F) é equivalente a $(E(\varphi), \pi_\varphi, B, F)$ o qual possui grupo estrutural discreto.

Vamos mostrar a recíproca. Suponhamos que (E, π, B, F) tem grupo estrutural discreto.

Neste caso, definimos a folheação $\mathcal{F}$ usando as cartas locais trivializadoras do fibrado.

Sejam $\{U_i, \psi_i\}_{i\in\mathcal{L}}$, onde $\bigcup U_i = B$ e, $\forall\, i \in \mathcal{L}$, U_i é aberto em B e $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$ é carta do fibrado.

Como o fibrado tem grupo estrutural discreto então a mudança de variáveis

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

tem a forma: $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x,y) = (x, \Phi_{ij}(y))$; ou seja, a segunda componente Φ_{ij} não depende de x.

Assim, as cartas $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ induzem uma folheação $\mathcal{F}$ em E cujas placas em $\pi^{-1}(U_i)$ são da forma: $\psi_i^{-1}(U_i \times \{y\})$, $y \in F$.

Da construção segue que $\mathcal{F}$ é transversal às fibras de E ∎

- Recobrimento Universal e automorfismos de recobrimento.

Definição: Dizemos que o recobrimento $\pi: E \to X$ é um recobrimento universal se E for simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos.

Definição. X é dito localmente simplesmente conexo se a topologia de X possui uma base constituída de abertos simplesmente conexos.

Teorema. Todo espaço conexo, localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo possui um recobrimento universal.

- Automorfismos de Recobrimento.

Seja $\pi: E \to X$ um recobrimento. Dizemos que uma aplicação contínua e bijetiva $f: E \to E$ é um automorfismo do recobrimento $E \xrightarrow{\pi} X$ se:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[dl, "\pi"] \\
& X &
\end{tikzcd} \qquad \pi \circ f = \pi.$$

em outras palavras, f leva fibra em fibra.

- Suponha que E é o recobrimento universal de X. Neste caso o grupo de automorfismos de recobrimento tem uma descrição simples.

Fixemos $e_0 \in E$, $x_0 = \pi(e_0) \in X$

Dado $f \in G(E,\pi,X)$ = cjto de automorfismos de recobrimento, seja

$\tilde{\alpha} : I \to E$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = e_0$, $\tilde{\alpha}(1) = f(e_0)$. Coloquemos $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$.
Então $x_0 = \pi(\tilde{\alpha}(0)) = (\pi \circ f)(e_0) = (\pi \circ \tilde{\alpha})(1) = \alpha(1)$.

Ou seja, α é uma curva fechada em X com $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Defina então:

$$\varphi : G(E,\pi,X) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)$$

$$\varphi(f) = [\alpha] \in \pi_1(X,x_0).$$

Tal φ é um isomorfismo de grupos (Teorema) e dado qq $e_1 \in \pi^{-1}(x_0)$ existe um único automorfismo $f \in G(E,\pi,X)$ tal que $f(e_0) = e_1$.

– Vamos agora provar o Teorema de Suspensão de Reps.

Teorema. (Suspensão de representações)

Sejam B e F variedades conexas e $\varphi : \pi_1(B,b_0) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(F)$ uma representação. Então existem um espaço fibrado $(E(\varphi), \pi, B, F)$ e uma folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ transversal às fibras de $E(\varphi)$ cuja holonomia é φ.

O fibrado $E(\varphi)$ tem grupo estrutural discreto.

demonstração: Seja $P: \tilde{B} \to B$ o recobrimento universal de B. A representação φ induz uma ação

$$\tilde{\varphi} : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r(\tilde{B} \times F)$$

da seguinte forma:

$$\tilde{\varphi}([\alpha])(\tilde{b}, f) = ([\alpha] \cdot \tilde{b}, \varphi([\alpha])^{-1} \cdot f),$$

onde $[\alpha] \cdot \tilde{b}$ denota a imagem de $\tilde{b}$ pelo automorfismo de recobrimento associado a $[\alpha]$.

· A ação $\tilde{\varphi}$ satisfaz a seguinte propriedade: $\forall\ \tilde{b} \in \tilde{B}$ existe uma vizinhança conexa V de $\tilde{b}$ em $\tilde{B}$ tal que: se $g \in \pi_1(B, b_0)$ e $g \neq 1$

então $\tilde{\varphi}(g)(V \times F) \cap (V \times F) = \emptyset$.

De fato, seja $V \subset \tilde{B}$, $\tilde{b} \in V$, uma vizinhança tal que $P: V \to P(V)$ é um difeo.

Para todo $g \in \pi_1(B, b_0)$, $\overset{g \neq 1}{}$ $g \cdot V \cap V = \emptyset$, pois se $y \in g \cdot V \cap V$ então $y = g(x)$, $x \in V$ $\therefore$ $P(y) = P(g(x)) = P(x)$ implicando que P não é biunívoca em V.

Assim:

$$\tilde{\varphi}(g)(V \times F) \cap (V \times F) = (g \cdot V \times \varphi(g)^{-1} F) \cap (V \times F) = \emptyset.$$

Vamos agora descrever como construir $E(\varphi)$ e $\mathcal{F}(\varphi)$.

- Em $\tilde{B}\times F$ introduzimos a relação de equivalência que identifica dois pontos quando eles estão na mesma trajetória via $\tilde{\varphi}$, isto é:

$$(\tilde{b},y)\sim(\tilde{b}',y') \text{ se } \exists\, g\in\pi_1(B,b_0) \text{ tal que } \tilde{\varphi}(g)(\tilde{b},y)=(\tilde{b}',y').$$

Definimos $\boxed{E(\varphi) = \tilde{B}\times F/\sim}$

- $\tilde{\varphi}$ preserva fibras de $\tilde{B}\times F \xrightarrow{P_1} \tilde{B}$, $P_1(\tilde{b},y)=\tilde{b}$. Podemos então definir $\pi: E(\varphi)\longrightarrow B$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{B}\times F \arrow[dl, "Q"'] \arrow[dr, "P_1"] & \\ E(\varphi) \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & \tilde{B} \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

onde Q é a proj. da relação de equiv.

- $E(\varphi)$ é um fibrado com base B, fibra F e projeção π.

- a folheação produto $\tilde{B}\times\{f\}$, $f\in F$, induz em $E(\varphi)$ uma folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ transversal às fibras de π e com holonomia φ ∎