O Teorema de Novikov

Teorema · Toda folheação de classe C^2 e codimensão um de uma variedade compacta de dimensão 3 com grupo fundamental finito possui uma folha compacta

Sketch da Demonstração:

Passo 1

definição: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um de uma variedade M. Dizemos que a curva fechada $f_0 : S^1 \to A_0$ é um ciclo evanescente se f_0 se estende a uma aplicação diferenciável

$$F : [0,\varepsilon] \times S^1 \longrightarrow M$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

a) $\forall\ t \in [0,\varepsilon]$, a curva $f_t : S^1 \to M$, definida por $f_t(x) = F(t,x)$ está contida numa folha A_t de $\mathcal{F}$.

b) $\forall\ x \in S^1$ a curva $t \mapsto F(t,x)$ é transversal a $\mathcal{F}$

c) Para $t > 0$, a curva f_t é homotópica à constante na folha A_t e f_0 não é homotópica à constante em A_0.

A aplicação F é chamada de extensão corrente do ciclo evanescente f_0.

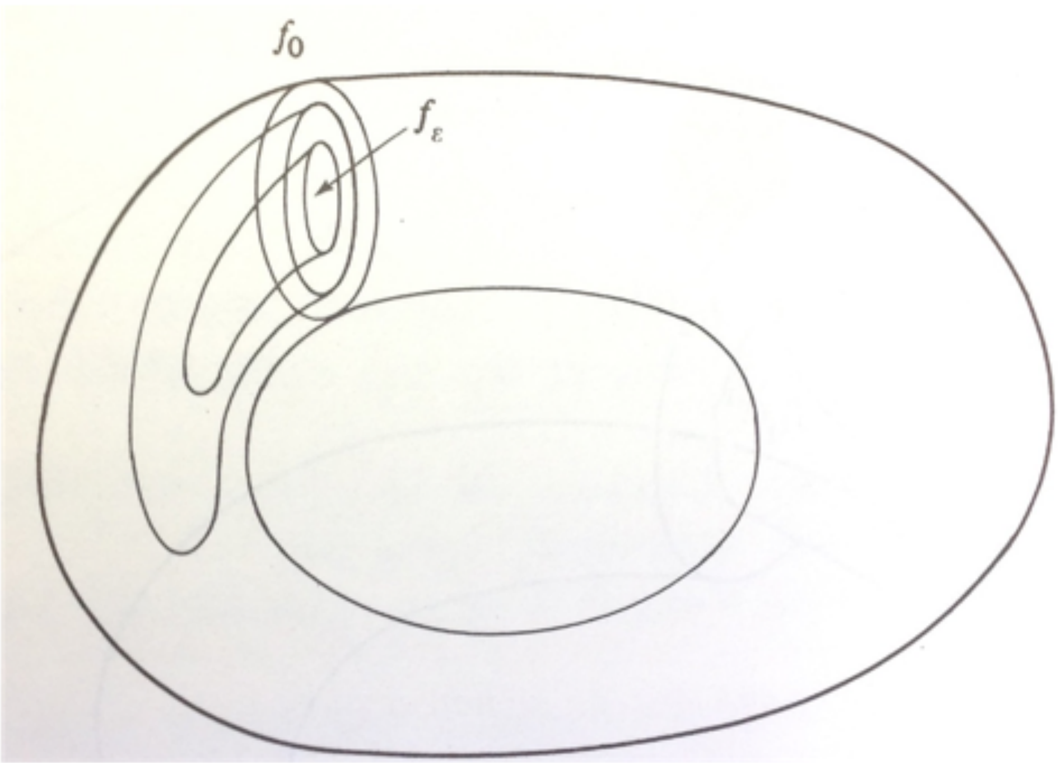
Proposição: Seja M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 3$ com grupo fundamental finito e $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^2 e codimensão um de M. Então $\mathcal{F}$ possui um ciclo evanescente.

Passo 2. O ciclo evanescente é agora modificado de forma a obter um ciclo evanescente simples: se $\pi_{A_t} : \hat{A} \to A_t$ denota o recobrimento universal de A_t então os levantamentos

$$\hat{f}_t : S^1 \longrightarrow \hat{A}_t \quad \text{de } f_t$$

são mergulhos $\forall\, t \neq 0$.

Passo 3. Mostrar que a existência de um ciclo evanescente simples implica na compacidade de A_0.

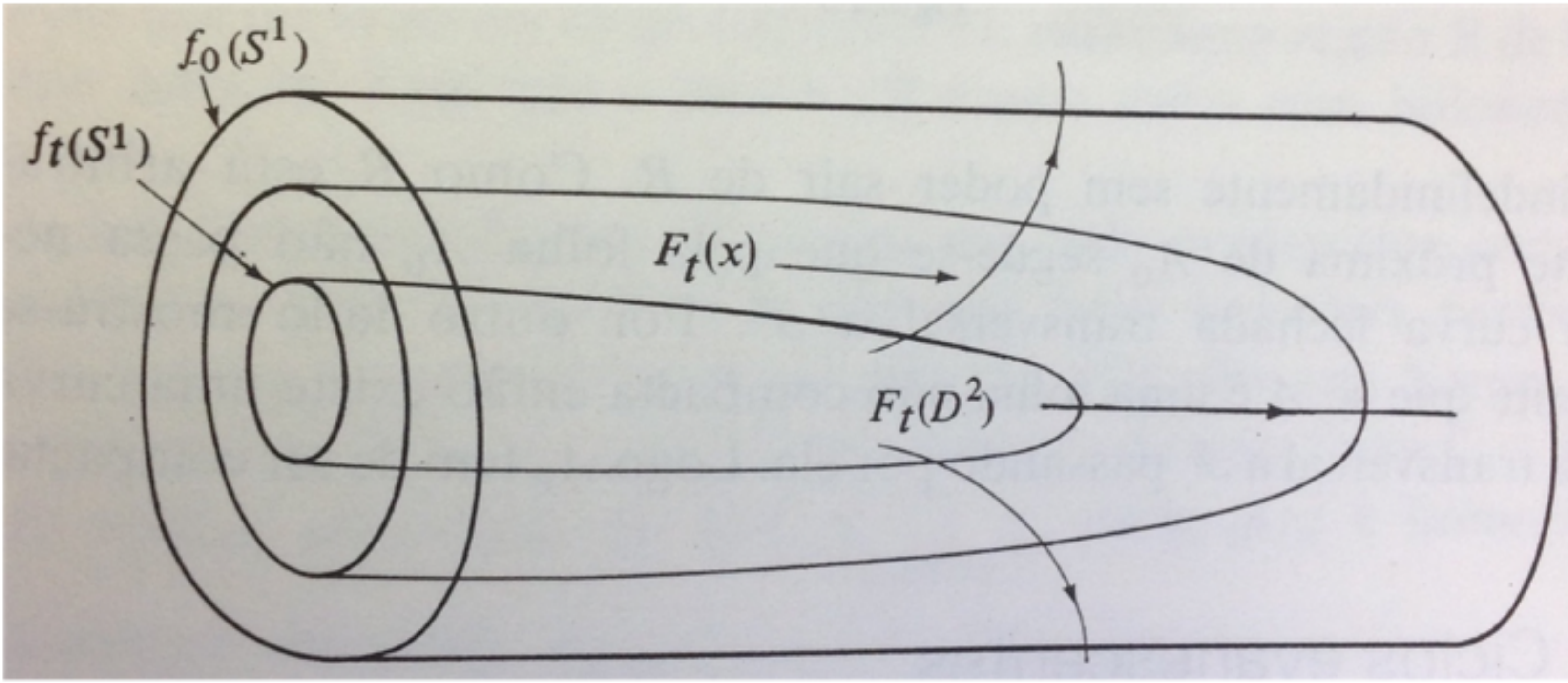


Ciclo evanescente (fig de Camacho – Lins, Neto)

- Obtido um ciclo evanescente simples $(f_t)_{t \in I}$ pode-se provar que existe uma família de imersões $F_t : D^2 \longrightarrow M$ de forma que se tenha

$$F_t / S^1 = f_t \quad e \quad F_t(D^2) \subset A_t \, , \; \forall \, t \neq 0 \, , \text{ tal que}$$

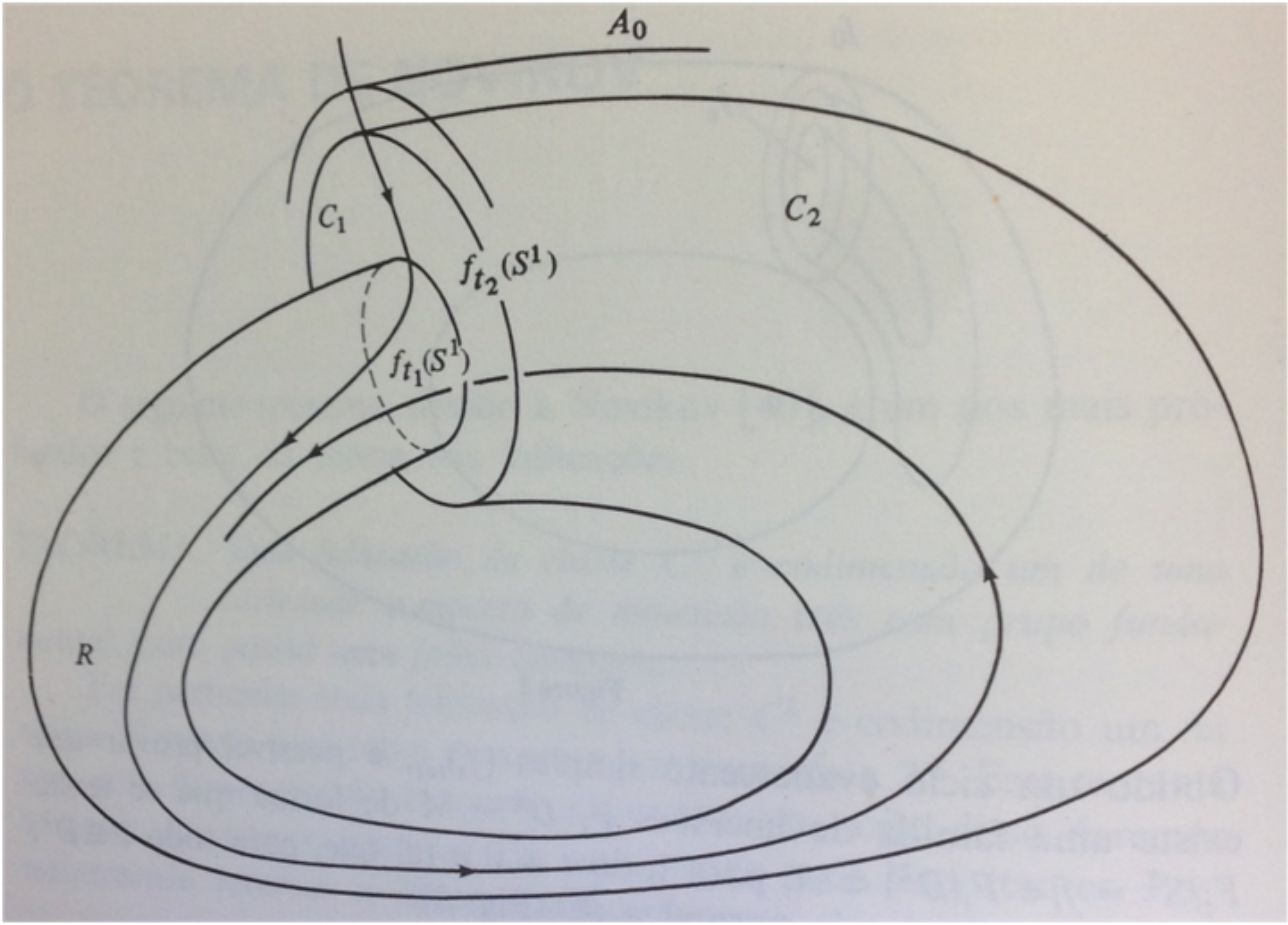
$\forall \; x \in D^2$ a curva $F_t(x)$ é normal a $\mathcal{F}$.



- Na sequência prova-se que $\forall \, \alpha > 0$ existem t_1, t_2 com:

$$0 < t_2 < t_1 < \alpha \quad \text{de forma que:}$$

1) $A_{t_1} = A_{t_2}$
2) $F_{t_1}(D^2) \subset F_{t_2}(D^2)$
3) Para todo t tal que $0 < t_2 < t < t_1$ tem-se $F_t(D^2) \cap F_{t_1}(D^2) = \emptyset$



Daí segue que arbitrariamente próxima de A_0 existe uma região R limitada pelas superfícies:

$$C_1 = \bigcup_{\substack{x \in S^1 \\ t_2 < t < t_1}} F_t(x) \quad e \quad C_2 = F_{t_2}(D^2) - F_{t_1}(D^2) \quad \text{tal}$$

que $A_0 \cap R = \emptyset$.

Esta região tem a propriedade: qualquer curva simples transversal a $\mathcal{F}$ que entra em R nunca mais sai de R.

Como R está arbitrariamente próxima de A_0 segue que pela folha A_0 não passa nenhuma curva fechada transversal a $\mathcal{F}$.

Por outro lado mostra-se que se A_0 não fosse compacta então existiria uma curva transversal passando por ela.

Assim A_0 é compacta.

Outros resultados clássicos

– Uma folha genérica não tem holonomia

Definição. Dizemos que uma folha F de $\mathcal{F}$ tem holonomia trivial se $Hol(F, x) = \{1\}$, $x \in F$.

Teorema (Hector; Epstein – Millet – Tischler) Seja $(M, \mathcal{F})$ uma variedade folheada. As folhas de $\mathcal{F}$ cuja holonomia é trivial formam um cjto genérico.

Obs. Um cjto genérico é um cjto residual, ou seja, um cjto que contém uma interseção enumerável de abertos e densos. Neste caso tal conjunto é denso em toda parte.

– Existência de minimais excepcionais e holonomia

Teorema (Sacksteder) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um e classe C^2 de uma variedade compacta M^m $(m \geq 1)$. Suponhamos que $\mathcal{F}$ possua um minimal excepcional μ. Então existe uma folha $L \subset \mu$ e uma curva fechada $\gamma : I \to L$ tal que, se f é o germe de holonomia de γ num segmento transversal Σ passando por $p = \gamma(0) = \gamma(1)$, então $f'(p) < 1$.

Em particular, a holonomia de L não é trivial.

- Folheações em $\mathbb{R}^n$:

<u>Teorema</u> (Palmeira) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r $(r \geq 0)$ e codimensão 1 definida em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Suponhamos que todas as folhas de $\mathcal{F}$ são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ e homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$. Então existe uma folheação $\overline{\mathcal{F}}$ em $\mathbb{R}^2$ e um difeomorfismo C^r (homeo se $r=0$) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ são da forma

$$f^{-1}(F \times \mathbb{R}^{n-2})$$

onde F é uma folha de $\overline{\mathcal{F}}$. Em outras palavras $\mathcal{F}$ é equivalente a uma folheação produto de uma folheação em $\mathbb{R}^2$ pelas fibras $\mathbb{R}^{n-2}$.

Este resultado foi publicado no Annals of mathematics.