Existência de Germes de Folheações

Problema. Seja $N \subset M$ uma subvariedade mergulhada em M. Em que condições existe uma folheação $\mathcal{F}$ definida em uma vizinhança de N e tal que N é uma folha de $\mathcal{F}$?

- $\nu(N) = \{(p,v) \in TM : p \in N,\ v \in T_pN^{\perp}\}$ = fibrado normal de N

c.r.a $\langle \cdot , \cdot \rangle$ fixada.

A seção nula de $\nu(N)$,

$$N_0 = \{(p,0) : p \in \nu(N)\} \overset{\text{difeo}}{\simeq} N$$

e, além disso, pelo teo. da vizinhança tubular, $\nu(N)$ é difeomorfa a uma vizinhança $\mathcal{U}$ de N em M por um difeo $f : \nu(N) \to \mathcal{U}$ tq $f(N_0) = N$.

* Assim, a existência de uma folheação numa viz. de N com N como folha é equiv. à exist. de uma folheação numa vizi. V de N_0 em $\nu(N)$ que possui N_0 como folha.

Teorema. Seja $N \subset M$ uma subvariedade mergulhada de classe C^2 de M. Existe uma vizinhança $\mathcal{U} \supset N$ e uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathcal{U}$ tal que N é uma das folhas de $\mathcal{F}$ se, e somente se, $\nu(N)$ possui alguma estrutura de espaço fibrado com grupo estrutural discreto.

prova :

Suponhamos que $\nu(N)$ seja equivalente a um fibrado vetorial E que possui grupo estrutural discreto. Neste caso a equivalência é um difeo.

$H : \nu(N) \longrightarrow E$ que leva fibras em fibras linearmente

em particular leva N_0 na seção nula de E. Por um Teo. existe uma folheação $\overline{\mathcal{F}}$ em E que é transversal às fibras de E. Tome

$$\mathcal{F} = H^*(\overline{\mathcal{F}}).$$

$\mathcal{F}$ é uma folheação de $\nu(N)$ cujas folhas são transversais às fibras.

- As cartas locais de $\overline{\mathcal{F}}$ são tb cartas locais de E. Como elas são lineares nas fibras então N_0 é uma folha de $\mathcal{F}$.

Suponha agora que exista uma folheação $\mathcal{F}$ definida em uma vizinhança de N_0 em $\nu(N)$ tal que N_0 é uma folha de $\mathcal{F}$.

Considere $(\mathcal{U}_i)_i$ uma cobertura de N_0 por vizinhanças trivializadoras de $\mathcal{F}$, onde estão definidas submersões $f_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}^p$, $p = m-n$, tais que as placas de $\mathcal{F}|\mathcal{U}_i$ são da forma

$$f_i^{-1}(x),\ x \in \mathbb{R}^p,\ e\ f_i(N \cap \mathcal{U}_i) = 0.$$

Considere tb as mud. de coordenadas $h_{ki} : f_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_k) \longrightarrow f_k(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_k)$ tais que $f_K = h_{Ki} \circ f_i$.

Dado $q \in N_0 \cap \mathcal{U}_i$, considere a aplic. linear $L_i(q) = d f_i(q) | T_q N_0^{\perp}$.

Como N_0 é folha de $\mathcal{F}$, $\forall\, i \in \mathcal{L}$ e $q \in \mathcal{U}_i$, $L_i(q)$ é isomorfismo.

Fixe uma base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$. Então os vetores

$$X_i^j(q) = (L_i(q))^{-1} \cdot (e_j) \quad , \; j = 1, \dots, p,$$

formam uma base para $T_q N_0^{\perp}$. Podemos então definir as cartas

$$\overline{x}_i : \pi^{-1}(N_0 \cap \mathcal{U}_i) \longrightarrow (N_0 \cap \mathcal{U}_i) \times \mathbb{R}^p \qquad \text{por:}$$

$$\overline{x}_i(q, X(q)) = (q, L_i(q) \cdot X(q)) = \left(q, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \cdot e_j \right),$$

onde $X(q) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \cdot X_i^j(q) \in T_q N_0^{\perp}$.

Se $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, a mud. de coordenadas será: $\overline{x}_K \circ \overline{x}_i^{-1}(q, v) = (q, g_{Ki}(q) \cdot v)$

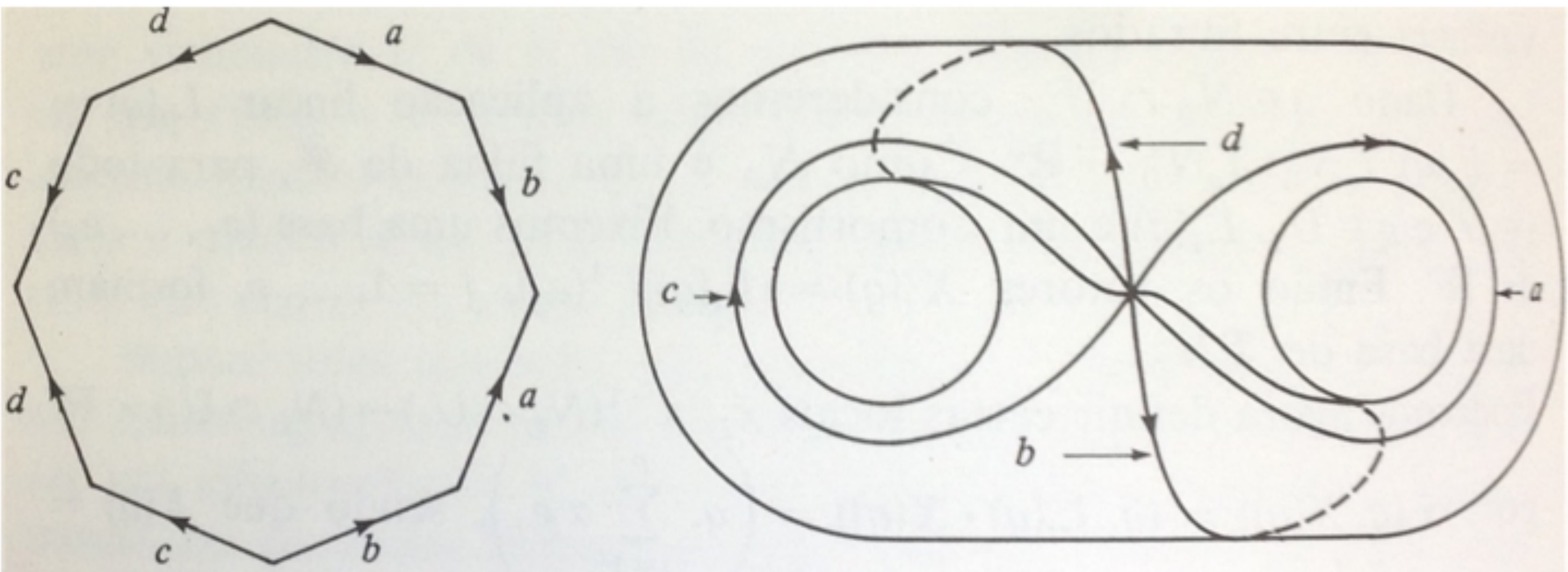
onde $g_{Ki}(q) = L_K(q) \circ L_i^{-1}(q) = Dh_{Ki}(0)$. Com isto o grupo estrutural de $\nu(N)$ é discreto ■

Teorema de Denjoy e o exemplo de Sacksteder

Teorema (Denjoy). Seja $\mathcal{F}$ uma folheação C^2 em $\mathbb{T}^2$ e μ um minimal excepcional de $\mathcal{F}$, então $\mu = \mathbb{T}^2$ ou μ é uma folha compacta (homeomorfa a S^1).

- Exemplo de Sacksteder.

Considere V_2 = bitoro



Desenho retirado do Camacho – Lins, Neto.

O grupo fundamental $\pi_1(V_2)$ é um grupo não abeliano gerado pelas curvas fechadas a, b, c e d, além disso a única relação não trivial entre elas é: $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1$.

Em particular $G := \langle a, c \rangle < \pi_1(V_2)$ é livre.

Sejam $f, g \in \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ podemos definir:

$$\bar{\varphi} : G \longrightarrow \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$$

$$\bar{\varphi}(a) = f, \quad \bar{\varphi}(c) = g.$$

O homomorfismo $\bar{\varphi}$ induz um homomorfismo $\varphi : \pi_1(V_2) \longrightarrow \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ por

$$\varphi(b) = \varphi(d) = 1, \quad \varphi(a) = f, \quad \varphi(c) = g.$$

A boa definição de φ segue do fato que:

$$\varphi(aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}) = f \cdot 1 \cdot f^{-1} \cdot 1 \cdot g \cdot 1 \cdot g^{-1} \cdot 1 =$$

$$= f \circ f^{-1} \circ g \circ g^{-1} = id.$$

Considere $\mathcal{F}(\varphi)$ a suspensão de φ, $E(\varphi)$ o fibrado onde $\mathcal{F}(\varphi)$ está definida. A holonomia de $\mathcal{F}(\varphi)$ é dada por φ.

Assim $\mathcal{F}(\varphi)$ possui um minimal excepcional $\Leftrightarrow$ a ação gerada por f e g em S^1 possui um cjto minimal homeomorfo ao Cantor ternário.

Vamos construir f e g com esta propriedade.

• Seja $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, um difeo $f: S^1 \to S^1$ se levanta a um difeo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+k) = f(x) + k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Defina $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x + \frac{1}{3}$ e tome $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

$g(x) = \frac{x}{3}$, para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\quad g(1) = 1$

$g(x) = 3x - \frac{5}{3}$, se $x \in [2/3, 5/6]$, $\quad g'(1) = 1/3$

e $g^{(k)}(1) = 0$ se $k \geq 2$, g C^∞ em $[0,1]$.

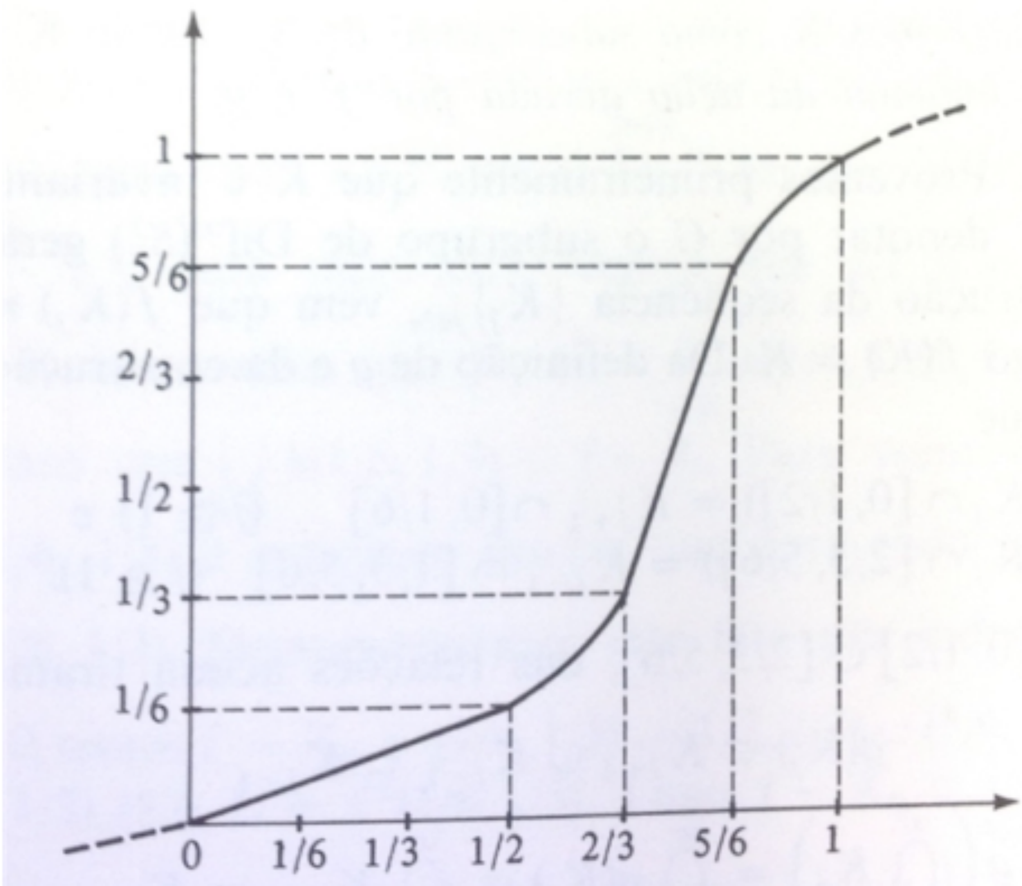


figura retirada do Camacho.

Consideremos os intervalos fechados K_j's definidos indutivamente da seguinte forma:

$$K_0 = [0, 1/6] \cup [1/3, 1/2] \cup [2/3, 5/6]$$

Suponha que $K_{j-1} = \bigcup_{n=1}^{3.2^{j-1}} [\alpha_n^{j-1}, \beta_n^{j-1}]$ esteja definido, definimos K_j retirando o terço médio de cada $[\alpha_n^{j-1}, \beta_n^{j-1}]$. Assim obtemos um cjto

$$K_j = \bigcup_{n=1}^{3.2^j} [\alpha_n^j, \beta_n^j]$$

onde

$$\beta_m^j - \alpha_m^j = \frac{1}{3}(\beta_n^{j-1} - \alpha_n^{j-1}) = \frac{1}{6 \cdot 3^j} .$$

Tome $K = \bigcap_{j=0}^{+\infty} K_j$. É fácil verificar que K é homeomorfo ao Cantor usual.

Lema 1. K é um conjunto invariante pela ação de f e g.

prova. Denote por G o subgrupo de $Diff^\infty(S^1)$ gerado por f e g.

É fácil ver que:

$$f(K_j) = K_j \ , \forall \ j \in \mathbb{N}, \text{ logo } f(K) = K.$$

Da definição de g e da construção de K_j segue que:

$$g(K_j \cap [0, 1/2]) = K_{j+1} \cap [0, 1/6] , \quad j \geq 1 \quad \text{e}$$

$$g(K_j \cap [2/3, 5/6]) = K_{j-1} \cap [1/3, 5/6] \quad , \quad j \geq 1 .$$

Como $K_j \subset [0, 1/2] \cup [2/3, 5/6]$, das relações acima tiramos que

$$g(K_j) \subset K_{j+1} \cup K_{j-1} \subset K_{j-1} .$$

Logo $g(K) = g(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j) = \bigcap_{j=1}^{\infty} g(K_j) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} g(K_j) \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} K_{j-1} = K$.

Analogamente,

$$g^{-1}(K_j \cap [0, 1/6]) = K_{j-1} \cap [0, 1/2] \quad \text{e}$$

$$g^{-1}(K_j \cap [1/2, 5/6]) = K_{j+1} \cap [2/3, 5/6] ,$$

ou seja, $g^{-1}(K_j) \subset K_{j-1}$. Logo $g^{-1}(K) \subset K$. Portanto $g(K) = K$ ▲

Lema 2. K é minimal.

prova. Como K é compacto e invariante então K tem um subcjto minimal μ. Vamos mostrar que $\mu = K$. Faremos isso em 2 passos:

- Passo 1. $1/3 \in \mu$

- Passo 2. $\overline{G \cdot 1/3} = K$.

Passo 1. Seja $x \in \mu$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x \in [0, 1/2]$, pois caso $x \in (1/2, 1]$ tomamos $f^{-1}(x)$ ou $f^{-2}(x)$.

Como μ é G-invariante, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ temos $g^n(x) = \frac{1}{3^n} x \in \mu$.

Logo $0 = \lim_{n\to\infty} g^n(x) \in \mu$. Assim $\frac{1}{3} = f(0) \in \mu$.

Passo 2. Vamos mostrar que $\mathcal{O}(1/3)$ é densa em K.

Seja $I - K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_n, \beta_n)$, como K é homeomorfo ao Cantor usual temos que

$$B = (\beta_n)_n \text{ é denso em } K.$$

Observe que $\frac{1}{3} \in B$, uma vez que $(1/6, 1/3)$ é um dos intervalos da decomposição de $I - K$.

Vamos mostrar que $\mathcal{O}(1/3) = B$, de onde segue que $\overline{\mathcal{O}(1/3)} = K$. Para isto basta provar que $I - K = \bigcup_{h\in G} h(1/6, 1/3)$, pois como $h'(t) > 0$, $\forall\, h \in G$ então se $h(1/6, 1/3) = (\alpha_n, \beta_n)$ temos $\beta_n = h(1/3)$.

- É claro que $\bigcup_{h\in G} h(1/6, 1/3) \subset I - K$. Agora observe que:

$$I - K_0 = (1/6, 1/3) \cup (1/2, 2/3) \cup (5/6, 1) =$$

$$= (1/6, 1/3) \cup f(1/6, 1/3) \cup f^2(1/6, 1/3).$$

Suponha por indução que $I - K_j \subset \bigcup_{h \in G} h(1/6, 1/3)$ para $0 \leq j \leq \ell - 1$.

Temos que $I - K_\ell \supset I - K_{\ell-1}$ e $(I-K_\ell) - (I - K_{\ell-1}) = \bigcup_{n=1}^{3 \cdot 2^{\ell-1}} I_n^\ell$, onde cada I_n^ℓ tem tamanho $\frac{1}{6} \cdot 3^{\ell}$.

Como $(I - K_\ell) - (I - K_{\ell-1}) \subset \left(0, \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$, $\ell \geq 1$, dado $n \in \{1, \ldots, 3 \cdot 2^{\ell-1}\}$ existe $i \in \{0, -1, -2\}$ tal que: $f^i(I_n^\ell) \subset (0, 1/6)$.

Por outro lado, como já vimos $g^{-1}(K_j \cap [0, 1/6]) = K_{j-1} \cap [0, 1/2]$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Logo $g^{-1}((I - K_\ell) \cap (0, 1/6)) = (I - K_{\ell-1}) \cap (0, 1/2)$ e $\therefore g^{-1} \circ f^i(I_n^\ell) = h\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ para algum $h \in G$.

Assim $I_n^\ell = f^{-i} \circ g \circ h\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow I_n^\ell \subset \bigcup_{h \in G} h\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, o que conclui o que queríamos demonstrar ∎