Basta provar agora (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b).

(a) $\Rightarrow$ (c). De fato, se F é fechada a aplicação $i: F \to M$ é um mergulho e a topologia intrínseca de F coincide com a topologia induzida pela topologia de M.

Além disso se $K \subset M$ é cpcto então $i^{-1}(K) = K \cap F$ é cpcto em M.

(c) $\Rightarrow$ (b) Se $i: F \to M$ é própria então dada $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta trivializadora com $\overline{\mathcal{U}}$ compacto temos $i^{-1}(\overline{\mathcal{U}})$ compacto em F, isto é, $\overline{\mathcal{U}} \cap F$ é compacto em F, logo $\overline{\mathcal{U}} \cap F$ só pode ter um número finito de placas (caso contrário teríamos uma cobertura de $\overline{\mathcal{U}} \cap F$ por abertos de F – placas de $\mathcal{U}$ – que ñ admite subcob. finita).

Assim todas as afirmações são equivalentes c.q.d ■

- Conjuntos Minimais das Folheações.

<u>definição</u>: Seja M uma variedade folheada por $\mathcal{F}$. Um subconjunto $\mu \subset M$ é <u>minimal</u> se satisfaz as seguintes propriedades:

a) μ é fechado, não vazio e invariante.

b) Se $\mu' \subset \mu$ é um subconjunto fechado e invariante então $\mu' = \emptyset$

Exemplo. 1) Toda folha fechada de $\mathcal{F}$ é um subconjunto minimal.

2) O único conjunto minimal na folheação de Reeb de S^3 é a folha compacta homeomorfa a $\mathbb{T}^2$.

Teorema. Toda folheação de uma variedade compacta possui um conjunto minimal.

demonstração. Seja M variedade compacta e $\mathcal{F}$ uma folheação de M. Denotemos com $\mathcal{C}$ a coleção dos subconjuntos compactos não vazios de M e invariantes por $\mathcal{F}$.

É claro que $\mathcal{C}$ é não vazio pois se $F \in \mathcal{F}$ então $\overline{F} \in \mathcal{C}$. Considere em $\mathcal{C}$ a relação de ordem parcial dada por inclusão de conjuntos.

Dada uma cadeia: $\mu_1 \supset \mu_2 \supset \dots$ de elementos de $\mathcal{C}$, o cjto

$$\mu = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

é fechado ($\therefore$ compacto), invariante e é não vazio.

Pelo Lema de Zorn $\mathcal{C}$ contém elementos minimais. Um elemento minimal de $\mathcal{C}$ é um subcjto minimal de $\mathcal{F}$ ∎

Teorema. Seja μ um subconjunto minimal de $\mathcal{F}$. Valem as seguintes propriedades:

a) Toda folha de $\mathcal{F}$ contida em μ é densa em μ.

b) Se M é conexa e μ tem interior não vazio então $\mu = M$.

c) Seja $p = \operatorname{cod} \mathcal{F}$ e Σ um disco de dimensão p transversal a $\mathcal{F}$ e tal que $\mu \cap \Sigma \neq \emptyset$. Se μ não se reduz a uma folha fechada então $\mu \cap \Sigma$ é um conjunto perfeito.

d) Se, além disso, $p = 1$, $\partial\Sigma \cap \mu = \emptyset$ e μ tem interior vazio e não é uma folha fechada, então $\mu \cap \Sigma$ é homeomorfo a um conjunto de Cantor. Neste caso dizemos que μ é um minimal excepcional.

demonstração.

a) Seja F uma folha de $\mathcal{F}$ contida em μ. Temos que $\overline{F}$ é fechado $\overline{F} \neq \emptyset$, $\overline{F} \subset \mu$. Como μ é minimal temos $\overline{F} = \mu$.

b) Se $\operatorname{int}(\mu) \neq \emptyset$, existe um aberto $A \subset \operatorname{int}(\mu)$. Em particular $\mathcal{F}(A) \subset \operatorname{int}(\mu)$ é aberto. Por (a) temos $\boxed{\mathcal{F}(A) = \mu}$.
Como $\mathcal{F}(A)$ é aberto em M, μ é aberto e fechado em M logo $\mu = M$.

c) Dado $x \in \Sigma \cap \mu$, seja F a folha de $\mathcal{F}$ por x.

Como μ não se reduz a uma folha fechada, existe uma folha $F' \subset \mu$, $F' \neq F$. Por (a) obtemos uma sequência $(x_n) \subset F' \cap \Sigma$ que se acumula em $x \in F \cap \Sigma$. Logo todo ponto de $\mu \cap \Sigma$ é não isolado.

d) Por (c) $\mu \cap \Sigma$ é um subconjunto compacto, perfeito, com interior vazio em Σ. Pelo seguinte lema concluímos o resultado ∎

Lema. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto, com interior vazio e perfeito. Então existe um homeomorfismo $h : K \longrightarrow \mathfrak{C}$, onde $\mathfrak{C}$ é o conjunto triádico de Cantor de $[0,1]$.

Holonomia e Teoremas de estabilidade

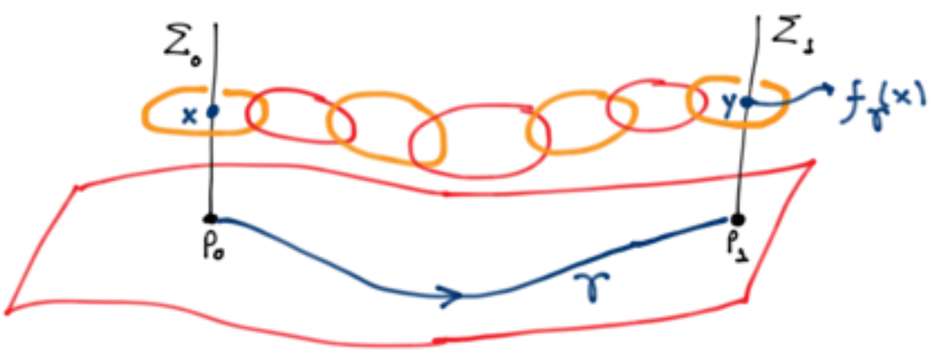
<u>Setting:</u> $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão n e classe C^r, $r \geq 1$, de uma variedade M^m.

Objetivo: Estudar o comportamento de folhas vizinhas a uma folha compacta F fixada.

– Holonomia de uma folha

Sejam $\gamma : [0,1] \to F$ um caminho contínuo e Σ_0, Σ_1 pequenas seções transversais a $\mathcal{F}$ de dimensão n passando por $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p_1$.

Queremos definir uma transformação local que leva Σ_0 em Σ_1 ao longo das folhas $\mathcal{F}$, sobre γ.



Sabemos que existe uma sequência de cartas locais $(\mathcal{U}_i)_{i=0}^{k}$ e uma partição de $[0,1]$:

$$0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1 \quad \text{tais que:}$$

1) Se $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ então $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_j$ está contido numa carta local de $\mathcal{F}$.
2) $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset \mathcal{U}_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Neste caso dizemos que $(\mathcal{U}_i)_{i=0}^{k}$ é uma cadeia subordinada a γ.

• Para cada $0 < i < k+1$ fixemos uma secção transversal a $\mathcal{F}$,

$D(t_i) \subset \mathcal{U}_{i-1} \cap \mathcal{U}_i$ homeomorfa a um disco de dimensão n passando por $\gamma(t_i)$. Coloquemos $D(0) = \Sigma_0$ e $D(1) = \Sigma_1$. Assim, para cada $x \in D(t_i)$ suficientemente próximo de $\gamma(t_i)$, a placa de $\mathcal{U}_i$ que passa por x intersecta $D(t_{i+1})$ em um único ponto $f_i(x)$.

O domínio de f_i contém um disco $D_i' \subset D(t_i)$ contendo $\gamma(t_i)$.

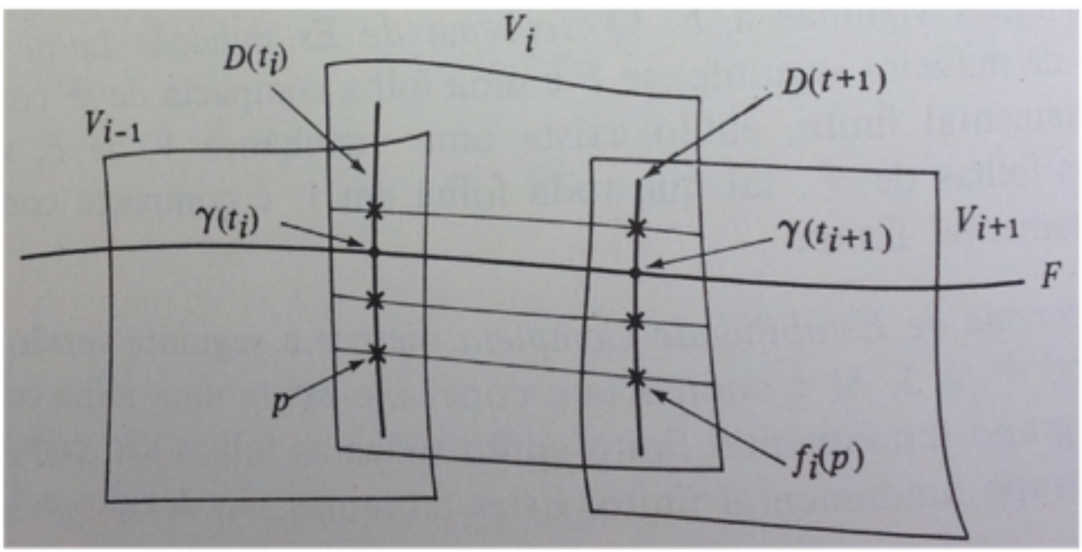


figura retirada de Camacho - Lins Neto.

Daí fica bem definida, em uma vizinhança de $p_0 \in \Sigma_0$, a composição

$$\boxed{f_\gamma = f_K \circ f_{K-1} \circ \cdots \circ f_0 .}$$

Chamaremos f_γ de aplicação de holonomia associada a γ.

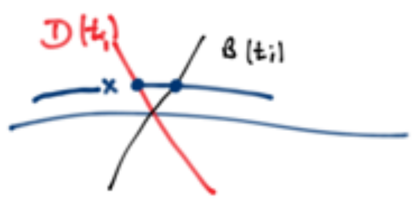
Lema. A aplicação f_γ independe dos discos $(D(t_i))_{i=1}^{K}$ e da cadeia subordinada, isto é, se $\tilde{f}_\gamma$ e f_γ são duas aplicações de holonomia associadas ao mesmo caminho, então $\tilde{f}_\gamma$ e f_γ coincidem na interseção dos seus domínios.

demonstração: Primeiro vamos fixar a cadeia subordinada e suponhamos que

$$(D(t_i))_{i=1}^{K} \quad \text{e} \quad (B(t_i))_{i=1}^{K}$$

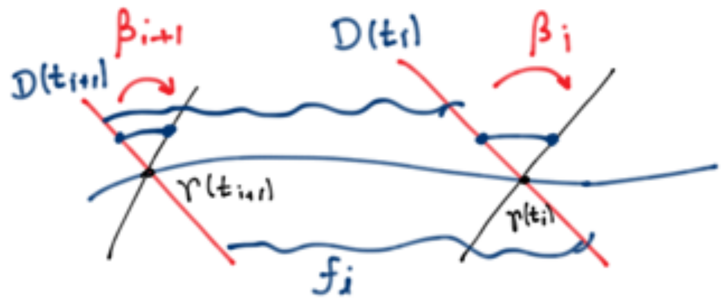
são duas coleções de discos como acima com $\gamma(t_i) \in D(t_i) \cap B(t_i)$ para todo i.

Dado $x \in D(t_i)$ próximo de $\gamma(t_i)$ podemos definir $\beta_i(x) \in B(t_i)$ interceptando a placa de $\mathcal{U}_i$ que passa por x com $B(t_i)$.



Temos então definido um homeomorfismo $\beta_i : \hat{D}_i \longrightarrow \hat{B}_i$ entre abertos $\hat{D}_i \subset D(t_i)$ e $\hat{B}_i \subset B_i(t)$ contendo $\gamma(t_i)$. Sejam $f_i : D_i' \longrightarrow D(t_{i+1})$ e $g_i : B_i' \longrightarrow B(t_{i+1})$ como anteriormente. Como $U_i \cup U_{i+1} \subset V$, onde V é carta local de $\mathcal{F}$, cada placa de V intersecta cada disco transversal em no máx. 1 ponto. Portanto o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\hat{D}_i \cap D_i' \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\beta_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \hat{D}_{i+1} \arrow[d, "\beta_{i+1}"] \\
\hat{B}_i \cap B_i' \arrow[r, "g_i"] & \hat{B}_{i+1}
\end{tikzcd}$$



Restringindo as aplicações f_i, g_i e β_i, $0 \le i \le K$, a domínios convenientes temos:

$$f_\gamma = f_K \circ f_{K-1} \circ \cdots \circ f_0 = \beta_{K+1}^{-1} \circ g_K \circ \beta_K \circ \beta_K^{-1} \circ g_{K-1} \circ \beta_{K-1} \circ \cdots \circ \beta_1 \circ \beta_1^{-1} \circ g_0 \circ \beta_0$$

$$= \beta_{K+1}^{-1} \circ g_\gamma \circ \beta_0 = g_\gamma \quad \text{já que } \beta_0 = id,\ \beta_{K+1} = id.$$

Portanto f_γ independe dos discos.

Exercício. Completar o lema ∎

Observação: Da definição de f_γ temos:

a) $f_\gamma(p_0) = p_1$.

b) Se $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ então $f_{\gamma^{-1}} = (f_\gamma)^{-1}$.

c) Se $\mathcal{F}$ é de classe C^r $(r \geq 1)$ as aplicações intermediárias f_i $(0 \leq i \leq K)$ são C^r $\therefore$ f_γ é C^r.

Como f_γ possui inversa C^r $(f_{\gamma^{-1}})$ então f_γ é difeo C^r.

d) Se $\tilde{\gamma}$ é obtida de γ por uma pequena deformação dentro da folha com extremidades fixas, então $f_{\tilde{\gamma}} = f_\gamma$, numa vizinhança de $p_0 \in \Sigma_0$. [de fato para $\tilde{\gamma}$ muito próxima de γ podemos tomar uma cadeia simultaneamente subordinada a $\tilde{\gamma}$ e a γ].

e) Se $\Delta_0 \subset \mathcal{U}_0$ e $\Delta_1 \subset \mathcal{U}_K$ são outros discos transversais a $\mathcal{F}$ em p_0 e p_1, as projeções ao longo das placas de $\mathcal{U}_0$ e $\mathcal{U}_K$ definem difeomorfismos C^r,

$$\varphi_0 : \Delta_0 \to \Sigma_0 \quad \text{e} \quad \varphi_1 : \Delta_1 \to \Sigma_1$$

A nova holonomia, $\Delta_0 \supset \Delta_0' \xrightarrow{g_\gamma} \Delta_1$ satisfaz:

$$g_\gamma(x) = \varphi_1^{-1} \circ f_\gamma \circ \varphi_0(x), \quad x \in \Delta_0'.$$

Em particular, se γ é um caminho fechado então $\Sigma_0 = \Sigma_1$ e $\Delta_0 = \Delta_1$, então g_γ e f_γ são conjugados: $g_\gamma = \varphi^{-1} \circ f_\gamma \circ \varphi$, onde $\varphi = \varphi_0 = \varphi_1$.

- Germes

definição: Sejam X, Y espaços topológicos e $x \in X$. No conjunto de aplicações $f: V \subset X \to Y$, onde V é uma vizinhança de x, introduzimos a relação de equivalência R dada por:

$f \, R \, g$ se existe uma vizinhança W de x tal que $f|W = g|W$.

A classe de equivalência $[f]$ é chamada de germe de f em x.

- Quando $X = Y$, o conjunto $G(X, x)$ de germes de homeos locais que fixam x é um grupo c/ a multiplicação:

$$\text{germe}(f) \cdot \text{germe}(g) = \text{germe}(f \circ g).$$

Teorema. Sejam $\gamma_i : I \to M$, $i = 0, 1$, caminhos contidos numa folha F de $\mathcal{F}$ tais que

$$\gamma_i(0) = p_0, \quad \gamma_i(1) = p_1, \quad i = 0, 1.$$

Sejam Σ_0, Σ_1 sec. transversais a F em p_0, p_1 e $f_{\gamma_i} : D_i \subset \Sigma_0 \to \Sigma_1$ aplicações de holonomia associadas a γ_i e φ_{γ_i} o germe de f_{γ_i} em p_0.

(1) Se $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel $\{0, 1\}$ então $\varphi_{\gamma_0} = \varphi_{\gamma_1}$.

(2) Se $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, então a transformação $\gamma \longmapsto \varphi_{\gamma^{-1}}$ induz um homomorfismo.

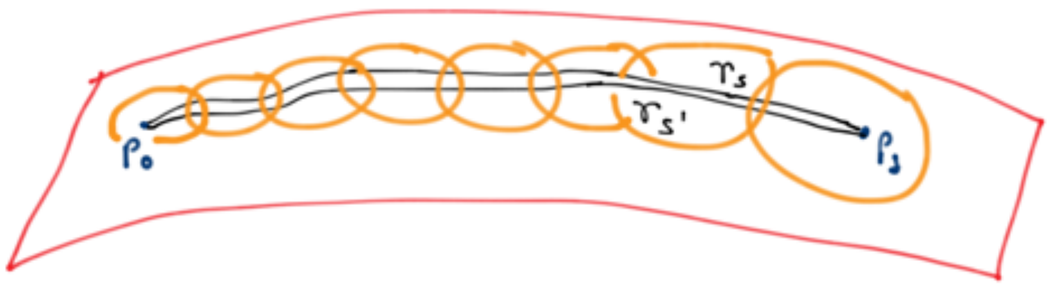
$$\Phi : \pi_1(F, p_0) \longrightarrow G(\Sigma_0, p_0), \quad \Phi([\gamma]) = \varphi_{\gamma^{-1}},$$

do grupo fundamental de F em p_0 no grupo de germes de difeos C^r de Σ_0 que deixam p_0 fixo.

demonstração: Seja $H : I \times I \to F$ uma homotopia entre γ_0 e γ_1, isto é

$$H(t,0) = \gamma_0(t), \quad H(t,1) = \gamma_1(t), \quad H(0,s) = p_0, \quad H(1,s) = p_1.$$

Para cada $\gamma_s : I \to F$, $\gamma_s(t) = H(t,s)$ existe uma cadeia subordinada a γ_s.



Por continuidade esta cadeia tb é subordinada a qq $\gamma_{s'}$ com s' próximo de s.

Assim, podemos encontrar uma coleção de cadeias $(C_i)_{i=1}^{n}$ e uma partição de I : $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ tais que:

para qualquer $i = 1, \dots, n$, C_i é subordinada a todos os caminhos γ_s, com $s_{i-1} \le s \le s_i$.

Pelo item (d) da observação segue que: germe $(f_{\gamma_{S_i}}) = $ germe $(f_{\tau_{S_i}})$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Logo $\varphi_{\gamma_0} = \varphi_{\gamma_1}$. Por este motivo, quando $p_0 = p_1$ a aplicação

$$\Phi : [\gamma] \to \varphi_{\gamma^{-1}}$$

está bem definida.

Finalmente, se C_λ, C_μ são cadeias subordinadas a λ^{-1} e μ^{-1} então $C_\lambda \cup C_\mu$ é uma cadeia subordinada ao produto $\lambda^{-1} * \mu^{-1}$ de λ, μ.

Portanto $\Phi([\mu].[\lambda]) = \Phi([\mu * \lambda]) = \varphi_{\lambda^{-1} * \mu^{-1}} = \varphi_{\mu^{-1}} \circ \varphi_{\lambda^{-1}} =$

$$= \Phi([\mu]) \cdot \Phi([\lambda])$$

ou seja, Φ é um homomorfismo dos grupos $\pi_1(F, p_0)$ e $G(\Sigma_0, p_0)$ ■

<u>definição</u>: O subgrupo $Hol(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$ de $G(\Sigma_0, p_0)$ é chamado grupo de holonomia de F em p_0.

Dadas $p_0, p_1 \in F$, qualquer caminho $\alpha : I \to F$ com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$ induz um isomorfismo

$$\alpha^* : Hol(F, p_0) \longrightarrow Hol(F, p_1)$$

$$\Phi([\mu]) \longrightarrow \varphi_\alpha \circ \Phi([\mu]) \circ \varphi_{\alpha^{-1}}$$

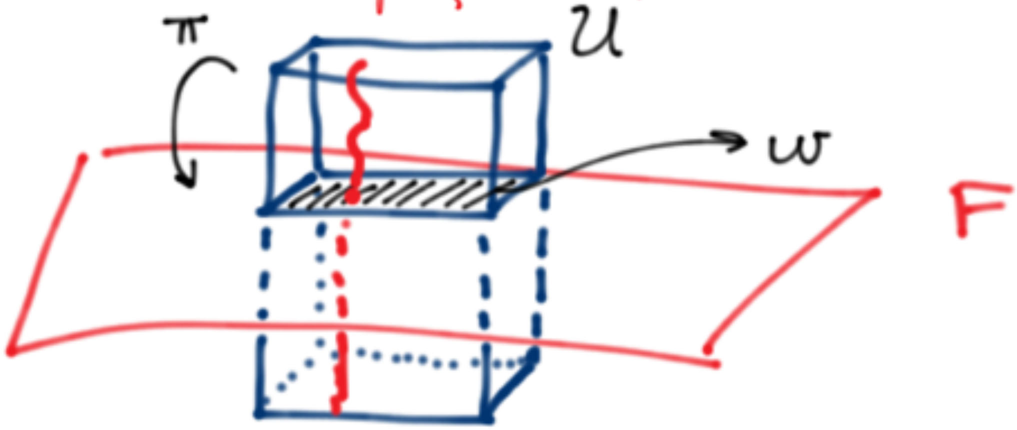
[independência do ponto base]

Por isto podemos falar do grupo de holonomia de F como sendo qualquer grupo isomorfo a $\mathrm{Hol}(F, p_0)$.

- Holonomia via Fibração transversal

Lema. Seja F uma folha de $\mathcal{F}$ e $K \subset F$ um subconjunto compacto. Existem vizinhanças $\mathcal{U} \supset \omega$ de K com $\mathcal{U}$ aberta em M e ω aberta em F, e uma retração $\pi : \mathcal{U} \to \omega$ de classe C^r tais que para qualquer $x \in \omega$, $\pi^{-1}(x)$ é transversal a $\mathcal{F} | \mathcal{U}$.

[retração $\pi : \mathcal{U} \to \omega$ é uma função tal que $\pi(\mathcal{U}) = \omega$, $\pi|\omega = id$]



demonstração: Como $K \subset F$ é compacto, existe uma superfície mergulhada ω formada por uma união finita de placas de $\mathcal{F}$ tal que $K \subset \omega$.

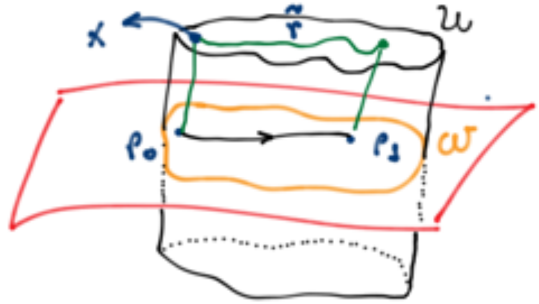
Tome $\tilde{\pi} : \tilde{\omega} \to \omega$ uma vizinhança tubular de classe C^r de ω. Como as fibras $\pi^{-1}(y)$, $y \in \omega$ intersectam ω transversalmente apenas em y temos que se $x \in \pi^{-1}(y)$ está suficientemente próximo de y então $\pi^{-1}(y)$ intersecta $\mathcal{F}(x)$ transversalmente em x

[Para ver isto use a caracterização de transversalidade via coordenadas locais].

Podemos então obter uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \tilde{\omega}$ tal que, para todo $y \in \mathcal{U} \cap F$, $\pi^{-1}(y)$ intersecta $\mathcal{F}|\mathcal{U}$ transversalmente. ∎

Seja $\gamma : I \to F$ uma curva contínua com $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p_1$. Sejam

- $\mathcal{U}$ vizinhança de $\gamma(I)$ em M
- ω vizinhança de $\gamma(I)$ em F
- $\pi : \mathcal{U} \to \omega$ como no lema anterior



Dado $x \in \pi^{-1}(p_0)$, suficientemente próximo de p_0, existe um único caminho $\tilde{\gamma} : I \to M$, contido na folha F_x de $\mathcal{F}$ que passa por x tal que:

$$\tilde{\gamma}(0) = x \quad , \pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t) \quad \text{para todo } t \in I.$$

O caminho $\tilde{\gamma}$ é um levantamento de γ à folha F_x ao longo das fibras de π.

A aplicação $f_\gamma(x) = \tilde{\gamma}(1)$ está bem definida para x próximo de p_0 e coincide com a aplicação de holonomia associada a γ.

- Germe de uma folheação

Seja $\mathcal{F}$ folheação de M, F uma folha de $\mathcal{F}$ e p_0 um ponto em F.

A holonomia de F induz uma ação local de $\pi_1(F, p_0)$ em Σ_0 da seguinte forma: para cada $[\gamma] \in \pi_1(F, p_0)$ e $x \in \Sigma_0$ suficientemente próximo de p_0, associamos o ponto $f_\gamma(x) \in \Sigma_0$.

definição: Sejam $(M, \mathcal{F})$, $(M', \mathcal{F}')$ folheações de codimensão n e classe C^r, $r \geq 1$, e $F \subset M$, $F' \subset M'$ folhas compactas. Dizemos que as holonomias de F e F' são C^s conjugadas $(s \leq r)$ quando existem seções transversais a F e F' Σ_0, Σ_0', com $p_0 \in \Sigma_0 \cap F$, $p_0' \in \Sigma_0' \cap F'$ e um homeomorfismo

$$h: F \cup \Sigma_0 \longrightarrow F' \cup \Sigma_0'$$

tal que $h(p_0) = p_0'$, $h|F$ e $h|\Sigma_0$ são difeos C^s (se $s \geq 1$) e para cada $[\gamma] \in \pi_1(F, p_0)$ tem-se:

$$h \circ f_\gamma \circ h^{-1}(x') = f_{h \circ \gamma}(x'),$$

para todo $x' \in \Sigma_0'$ suficientemente próximo de p_0'.

Teorema. Sejam F e F' folhas compactas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ respectivamente. As holonomias de F e F' são C^s conjugadas se, e somente se, existem vizinhanças $V \supset F$, $V' \supset F'$, e um difeomorfismo C^s, $H: V \to V'$, $H(F) = F'$, levando folhas de $\mathcal{F}|V$ em folhas de $\mathcal{F}'|V'$ (homeo se $s = 0$).
Neste caso dizemos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são localmente equivalentes em F e F' e que H é uma equivalência local.

demonstração:

($\Leftarrow$) Suponhamos que exista uma equivalência local H. Fixado $p_0 \in F$, sejam Σ_0 e $\Sigma_0' = H(\Sigma_0)$ seções transversais passando por p_0 e $p_0' = H(p_0)$.

Sejam $[\gamma] \in \pi_1(F, p_0)$ e $C = (U_i)_{i=0}^{K}$ uma cadeia subordinada a γ.

Os abertos $U_i' = H(U_i)$ definem uma cadeia $C' = (U_i')_{i=0}^{K}$ subordinada a γ.
Os abertos $U_i' = H(U_i)$ definem uma cadeia $C' = (U_i')_{i=0}^{K}$ subordinada a $H\circ\gamma$.

Daí segue que as aplicações $f_\gamma : W_0 \subset \Sigma_0 \to \Sigma_0$, $f_{H\circ\gamma} : W_0' \subset \Sigma_0' \to \Sigma_0'$ satisfazem:

$$H \circ f_\gamma \circ H^{-1}(x') = f_{H\circ\gamma}(x'),$$ se $x' \in \Sigma_0'$ está suficientemente próximo de p_0'.

Logo as holonomias de F e F' são conjugadas.

($\Rightarrow$) Suponhamos agora que as holonomias de F e F' são conjugadas. Como F e F' são compactas, existem vizinhanças V de F, V' de F' e retrações

$\pi : V \to F$, $\pi' : V' \to F'$ com fibras transversais a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ respectivamente.

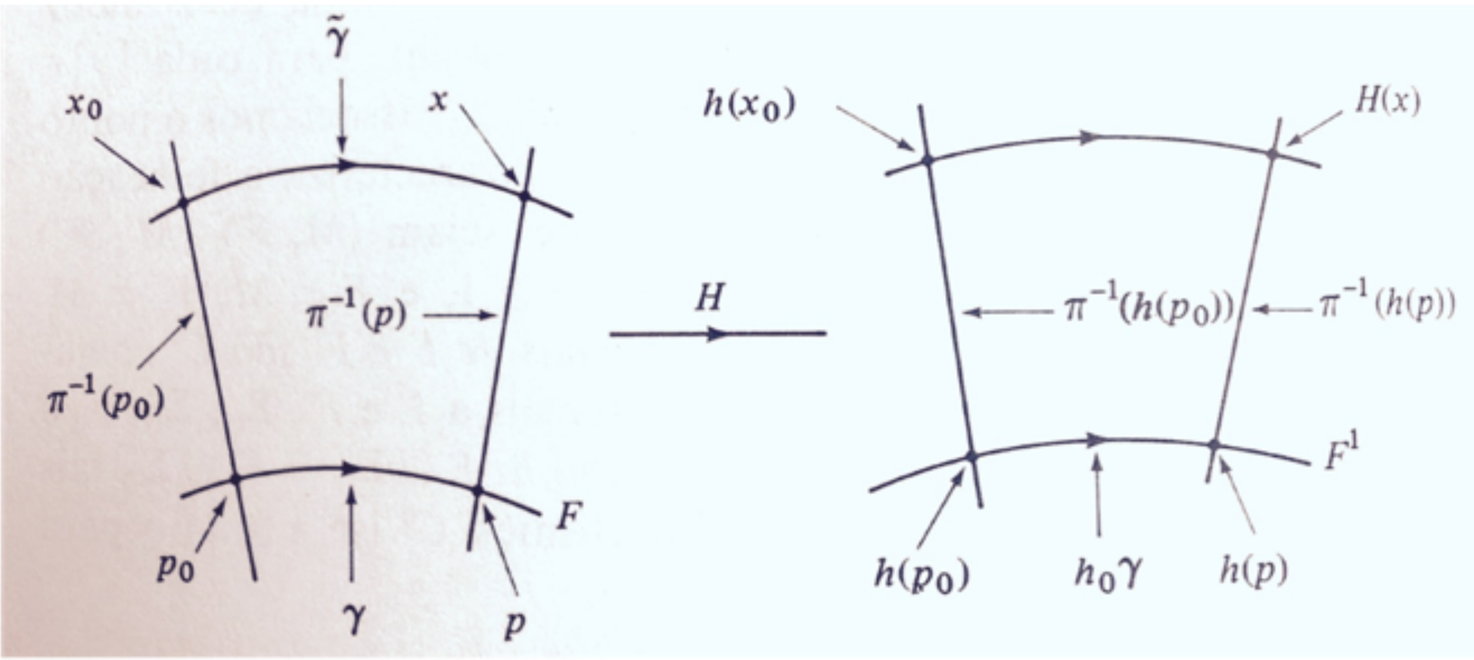
Seja $h : F \cup \Sigma_0 \to F' \cup \Sigma_0'$ um homeomorfismo que conjuga as holonomias de F e F'.

Podemos supor, sem perda de generalidade que: $\Sigma_0 = \pi^{-1}(p_0)$, $\Sigma_0' = (\pi')^{-1}(h(p_0))$

Dado $p \in F$, $p \neq p_0$, seja $\gamma : I \to F$ uma curva ligando p_0 a p. Sejam

$f_\gamma : D_{p_0} \subset \pi^{-1}(p_0) \to \pi^{-1}(p)$ e $f'_{h(\gamma)} : D'_{h(p_0)} \to (\pi')^{-1}(h(p))$ as transformações de holonomia de γ e $h \circ \gamma$.

Para $x \in f_p(D_p)$ definimos $H(x) = f'_{h(\gamma)}(h(f_{\gamma^{-1}}(x)))$.



* independência do caminho: Suponha que $\mu : I \to F$ é outro caminho com $\mu(0) = p_0$, $\mu(1) = p$.

Por hipótese, $h \circ f_{\mu * \gamma^{-1}} = f'_{h(\mu * \gamma^{-1})} \circ h$. Assim

$$f'_{h(\mu)} \circ h \circ f_{\mu^{-1}} = f_{h(\gamma)} \circ h \circ f_\gamma = H.$$

* Domínio de H: Dado $p \in F$ seja $\mathcal{U}_p$ um disco coordenado de $\mathcal{F}$ tal que para todo $y \in \mathcal{U}_p \cap F$, $\pi^{-1}(y)$ intersecta todas as placas de $\mathcal{U}_p$ e $\mathcal{U}_p \cap F$ contém apenas uma placa.

Fixada uma curva γ de p_0 a p, podemos supor que, $\forall\, z \in \mathcal{U}_p$, a placa de $\mathcal{U}_p$ por z corta $\pi^{-1}(p)$ num ponto z_1 no domínio de $f_{\gamma^{-1}}$.

Seja $\mathcal{U}'_{h(p)}$ um disco coordenado de $\mathcal{F}'$ tal que toda placa de $\mathcal{U}'_{h(p)}$ corta

$(\pi')^{-1}(h(p))$ num ponto de dom$(f'_{h(\gamma^{-1})})$. Diminuindo eventualmente $\mathcal{U}_p$ e $\mathcal{U}'_{h(p)}$, podemos supor tb que

$$h(f_{\gamma^{-1}}(\pi^{-1}(p) \cap \mathcal{U}_p)) = f'_{h(\gamma^{-1})}((\pi')^{-1}(h(p)) \cap \mathcal{U}'_{h(p)})$$

e

$$h(\mathcal{U}_p \cap F) = \mathcal{U}'_{h(p)} \cap F'.$$

Assim H está definida em $\mathcal{U}_p$ e $H(\mathcal{U}_p) = \mathcal{U}'_{h(p)}$. Como F é cpcto podemos obter uma vizinhança de F: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{x_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{x_k}$ onde H está definido.

Da construção $H: \mathcal{U} \to H(\mathcal{U}) = \mathcal{U}'$ é difeo C^s que leva folhas de $\mathcal{F}|\mathcal{U}$ em folhas de $\mathcal{F}|\mathcal{U}'$ ■

$\forall\, y \in (a,0)$. Ou seja, neste caso temos $f = id$.

<u>2º Caso</u>. $f(0,b) \subset (-\infty, 0)$.

Neste caso f é estritamente decrescente e, portanto, $f^2(0,b) \subset (0,+\infty)$.
Assim, $f^2 = id$.

Assim, todo elemento de G tem ordem ≤ 2 e $\therefore$ G é abeliano.

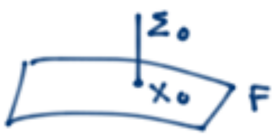
Suponhamos que $\exists\, f, g \in G$ com $f, g \neq 1$. Seja $(a,b) = \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom}\, g$
Como $f, g \neq 1$ temos

$$g(0,b) \subset (a,0) \quad e \quad f(g(0,b)) \subset (0,+\infty).$$

Logo $f \circ g = id \implies f = g^{-1}$. Como $g^2 = id$ segue que: $f = g^{-1} = g$ concluindo o que queríamos demonstrar ■

<u>Corolário</u>. Seja F uma folha compacta de uma folheação $\mathcal{F}$ de codim 1 tal que $\pi_1(F)$ é finito. Então $\mathrm{Hol}(F, x_0)$, $x_0 \in F$, contém no máximo dois elementos. Se $\mathcal{F}$ for transv. orientável então $\mathrm{Hol}(F, x_0) = \{1\}$.

<u>prova</u>.



Seja Σ_0 uma seção transv. aberta de $\mathcal{F}$ por x_0, então $\Sigma_0 \simeq \mathbb{R}$ e $\therefore$ $\mathrm{Hol}(F, x_0) \simeq \mathrm{Hol}(\mathbb{R}, 0)$ que, pelo lema anterior tem no max. 2 elementos.

Suponha que $\mathcal{F}$ é transv. orientável. Neste caso existe um campo de vetores X em M que não se anula e é transversal a $\mathcal{F}$.