definição: Dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é invariante ou saturado por $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F}(A) = A$, ou seja, $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.

Teorema. Seja $A \subset M$ um subconjunto invariante por $\mathcal{F}$. Então o seu interior $\mathring{A}$, seu fecho $\bar{A}$ e sua fronteira ∂A tb são invariantes por $\mathcal{F}$.

Prova. $\mathring{A}$ = maior aberto contido em A.

Como π é aberta, o conjunto $B = \pi^{-1}(\pi(A^\circ)) \subset \pi^{-1}(\pi(A)) = A$ é aberto. Logo $B \subset A^\circ$ $\therefore$ $\pi^{-1}(\pi(A^\circ)) = A^\circ$.

Agora, se A é invariante então $M - A$ tb é. Logo $\mathrm{int}(M-A)$ tb é. Mas $\mathrm{int}(M-A) = M - \bar{A}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ é invariante.

Como $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$ então ∂A tb é invariante ■

- Uniformidade Transversal

Seja Σ uma subvariedade de M. Dizemos que Σ é transversal a $\mathcal{F}$ quando Σ é transversal a TODAS as folhas de $\mathcal{F}$.

definição. Se Σ for transversal a $\mathcal{F}$ e $\dim \Sigma + \dim \mathcal{F} = \dim M$, dizemos que Σ é uma seção transversal de $\mathcal{F}$.

Obs.:

Dado $p \in M$ sempre existe uma seção transversal de $\mathcal{F}$ passando por p.

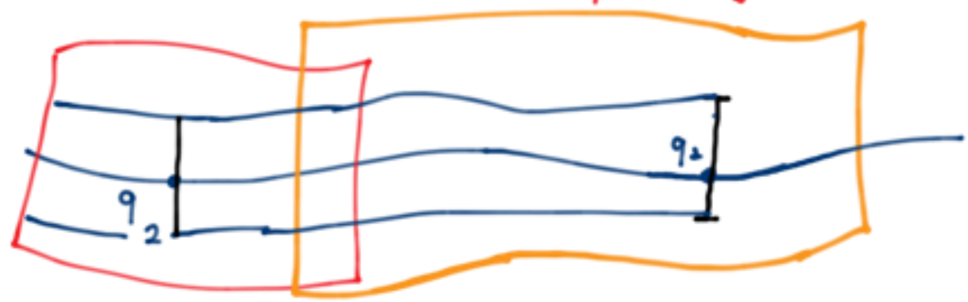
De fato, basta considerar uma carta local $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$ com $p \in U$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$, $\varphi(p) = (c_1, c_2)$ e tomarmos $\Sigma = \varphi^{-1}(\{c_1\} \times U_2)$.

Teorema. [Uniformidade transversal de $\mathcal{F}$] Seja F uma folha de $\mathcal{F}$. Dadas $q_1, q_2 \in F$, existem seções transversais de $\mathcal{F}$, Σ_1 e Σ_2 com $q_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$, e um difeomorfismo C^r, $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ tal que para qualquer folha F' de $\mathcal{F}$ tem-se:

$$f(F' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2 .$$

demonstração: Sejam $q_1, q_2 \in F$.

"Desenho demonstração"



Faremos uso do seguinte lema.

Lema. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M. Existe uma cobertura de M, $\mathcal{C} = \{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ de M por domínios de cartas locais de $\mathcal{F}$ tal que se $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ então $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{U}_j$ está contido no domínio de uma carta local de $\mathcal{F}$.

demonstração: Consideremos uma cobertura de M por compactos

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad \text{onde} \quad K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1}).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixemos uma cobertura de K_n por domínios de cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$, $\{V_i^n : i = 1, \dots, k_n\}$.

Seja $\delta_n > 0$ o número de Lebesgue desta cobertura c/ relação a alguma métrica fixa em M. Podemos supor que (δ_n) é decrescente.

Basta agora tomarmos uma cobertura de K_n por domínios de cartas trivializadoras, $\{\mathcal{U}_j^n \mid j = 1, \dots, \ell_n\}$, tal que $\operatorname{diam} \mathcal{U}_j^n < \delta_n/2$, $\forall j$.
Assim, se $\mathcal{U}_i^n \cap \mathcal{U}_j^n \neq \emptyset$ então $\operatorname{diam} \mathcal{U}_i^n \cup \mathcal{U}_j^n < \delta_n \therefore \mathcal{U}_i^n \cup \mathcal{U}_j^n \subset V_\lambda^n$ para algum $\lambda \in \{1, \dots, k_n\}$. Logo $\mathcal{C} = \{\mathcal{U}_j^n : j = 1, \dots, \ell_n, n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz o requerido ■

Sejam $q_1, q_2 \in F$ e α_1, α_2 placas tais que $q_1 \in \alpha_1$, $q_2 \in \alpha_2$ e $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \emptyset$. Considere $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{F}$ onde $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ é um sistema conforme o Lema anterior.

Chame: $\varphi_1(U_1) = U_1^1 \times U_2^1$, $\varphi_2(U_2) = U_1^2 \times U_2^2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$. Considere $p_0 = q_1$, $p_1 \in \alpha_1 \cap \alpha_2$ e $p_2 = q_2$.

Além disso considere: $\varphi_1(p_1) = (x_1, y_1)$, $\varphi_2(p_2) = (x_2, y_2)$, $\varphi_1(p_0) = (x_0, y_0)$.

e os discos transversais: $D_1 = \varphi_1^{-1}(\{x_1\} \times U_2^1)$, $D_2 = \varphi_2^{-1}(\{x_2\} \times U_2^2)$ e $D_0 = \varphi_1^{-1}(\{x_0\} \times U_2^1)$.

- Como $U_1 \cup U_2$ está contido em uma carta de $\mathcal{F}$, existe um disco B_1 de dimensão s com $p_1 \in B_1 \subset D_1 \cap U_2$ tal que: cada placa de U_2 corta B_1 no máximo uma vez.

Podemos então definir uma aplicação injetora $f_1 : B_1 \to D_2$ da seguinte forma:

$f_1(p)$ = pto de interseção da placa β de U_2 tal que $p \in \beta$, com D_2.

Analogamente podemos definir uma função $g_0 : B_1 \to D_0$ injetora por

$g_0(p) =$ interseção da placa β de $\mathcal{U}_1$ tal que $p \in \beta$ com D_0.

Assim $g_0(p_1) = p_0$, $f_1(p_1) = p_2$. Além disso g_0 e f_1 são difeos C^r (sobre suas imagens):

de fato uma carta local para B_1 é $\pi_1 \circ \varphi_1$; uma carta local para D_0 é $\pi_2 \circ \varphi_1$; uma carta local para D_2 é $\pi_2 \circ \varphi_2$. Então:

$$(\pi_2 \circ \varphi_1) \circ g_0 \circ (\pi_1 \circ \varphi_1)^{-1} = \pi_2 \circ \underbrace{(\varphi_1 \circ g_0 \circ \varphi_1^{-1})}_{\text{const. na } 2^{\text{a}} \text{ coord}} \circ \pi_2^{-1}$$

$$= id.$$

e

$$(\pi_2 \circ \varphi_2) \circ f_1 \circ (\pi_2 \circ \varphi_1)^{-1} = \pi_2 (\varphi_2 \circ f_1 \circ \varphi_1^{-1}) \circ \pi_2^{-1} \quad (\star)$$

Como f_1 preserva a placa então $\varphi_2 \circ f_1 \circ \varphi_1^{-1}$ tem seg. coordenada que independe da primeira logo $(\star) =$ função C^r.

Assim $f : \Sigma_1 = g_0(B_1) \longrightarrow \Sigma_2 = f_1(B_1)$ dada por $f = f_1 \circ g_0^{-1}$ é C^r difeo como queríamos.

O caso geral segue por indução ∎

Teorema. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em M, F uma folha de $\mathcal{F}$ e Σ uma seção transversal de $\mathcal{F}$ tal que $\Sigma \cap F \neq \emptyset$. Temos três possibilidades:

(1) $\Sigma \cap F$ é discreto e neste caso F é uma folha mergulhada

(2) O fecho de $\Sigma \cap F$ em Σ tem interior não vazio. Isto ocorre se, e só se, $\mathrm{int}(\overline{F}) \neq \emptyset$ e $\mathrm{int}(\overline{F}) = \overline{F} - \partial \overline{F}$ é um aberto que contém F. Neste caso dizemos que F é localmente densa.

(3) $\overline{\Sigma \cap F}$ é um conjunto perfeito (isto é, fechado sem ptos isolados) com interior vazio. Neste caso dizemos que F é uma folha excepcional.

demonstração: Suponhamos que $p \in \Sigma \cap F$ e $q \in F$, $q \neq p$. Pelo Teorema anterior existem discos transversais Σ_1 e Σ_2 com:

$$p \in \Sigma_1 \subset \Sigma \quad , \quad q \in \Sigma_2 \quad \text{e um difeo } f: \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

tais que para toda folha F' de $\mathcal{F}$, $f(F' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2$.

Em particular $F \cap \Sigma_1$ é homeomorfo a $F \cap \Sigma_2$ e $\overline{F \cap \Sigma_1}$ e $\overline{F \cap \Sigma_2}$ tb são homeomorfos.

Caso $q \in \Sigma$ podemos tomar $\Sigma_2 \subset \Sigma$.

Do Teo anterior temos as seguintes possibilidades:

(1) p é ponto isolado de $\Sigma \cap F$. Neste caso $\Sigma \cap F$ é todo de pontos isolados.

Se o caso (1) não ocorrer $\Sigma \cap F$ não tem pontos isolados. Neste caso $\overline{\Sigma \cap F}$ pode ter interior ou não e aí:

(2) $p \in \operatorname{int}(\overline{\Sigma \cap F})$ em Σ. Neste caso todos os pontos são pontos interiores

(3) $\operatorname{int}(\overline{\Sigma \cap F}) = \emptyset$ e $\Sigma \cap F$ não é discreto.

Suponha que estamos no caso:

(1) Se $q \in F$ e $(\mathcal{U}, \varphi)$ é carta trivializadora de $\mathcal{F}$ com $q \in \mathcal{U}$ e $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, então $D^s = \varphi^{-1}(\{x\} \times \mathcal{U}_2)$ é um disco transversal a $\mathcal{F}$, logo $F \cap D^s$ é um conjunto discreto que contém q. Portanto podemos tomar um disco menor $\widetilde{\mathcal{U}}_2 \subset \mathcal{U}_2$ tq $D = \varphi^{-1}(\{x\} \times \widetilde{\mathcal{U}}_2)$ corta F apenas em q, ou seja,

$$\varphi^{-1} | \mathcal{U}_1 \times \widetilde{\mathcal{U}}_2 : \mathcal{U}_1 \times \widetilde{\mathcal{U}}_2 \longrightarrow M \quad \text{é um mergulho } C^r$$

tal que $F \cap \varphi^{-1}(\mathcal{U}_1 \times \widetilde{\mathcal{U}}_2)$ contém apenas uma placa de $\mathcal{U}$

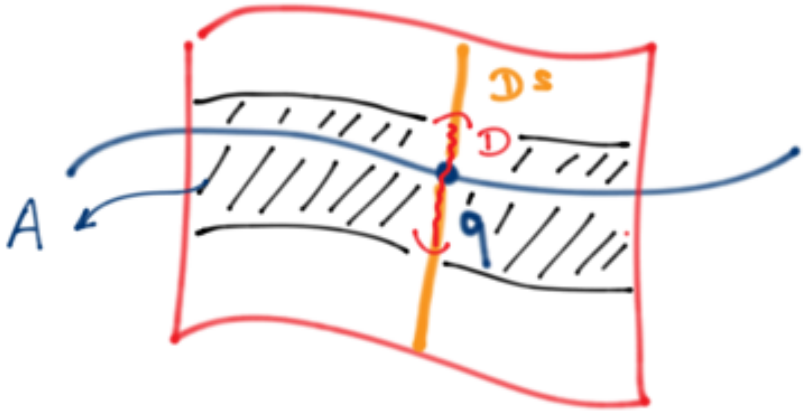
Portanto F é subvariedade C^r de M. Reciprocamente, se F é subvariedade, $i: F \to M$ é mergulho $\therefore$ $\Sigma \cap F$ é discreto.

(2) Sejam $q \in F$, $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathcal{U}$, com $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ como anteriormente. Coloquemos

$$D^s = \varphi^{-1}(\{x\} \times \mathcal{U}_2).$$

Então q é ponto interior de $\overline{F \cap D^s}$, logo existe um disco $\tilde{\mathcal{U}}_2 \subset \mathcal{U}_2$ tal que $D = \varphi^{-1}(\{x\} \times \tilde{\mathcal{U}}_2) \subset \overline{F \cap D^s}$. Portanto F contém o aberto:

$$A = \varphi^{-1}(\mathcal{U}_1 \times \tilde{\mathcal{U}}_2)$$

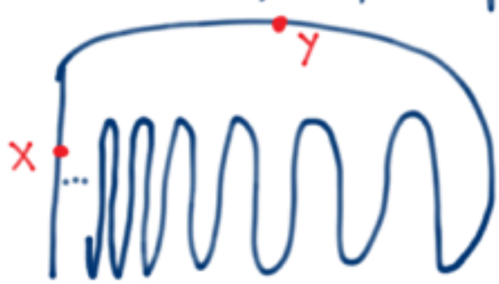


Além disso $\bar{F}$ é invariante $\therefore$ $\mathcal{F}(B) \subset \bar{F}$. Mas $F \subset \mathcal{F}(B) \subset \bar{F}$

onde $B = \text{int}(\bar{F})$; logo $\mathcal{F}(B) = \bar{F} - \partial \bar{F}$.

(3) Este caso é o complementar dos casos (1) & (2) ■

Exemplo. A seguinte variedade imersa F desenhada abaixo, não é folha de nenhuma folheação definida num aberto de $\mathbb{R}^2$



- seja Σ transversal por x; x é ponto de acumulação de $F \cap \Sigma$
- seja Σ_2 transversal por y; y é ponto isolado de $\Sigma_2 \cap F$.

Folhas Fechadas.

Teorema. Seja F uma folha de uma folheação $\mathcal{F}$ de M: As afirmações abaixo são equivalentes:

a) F é folha fechada.

b) Se $(\mathcal{U}, \varphi)$ é uma carta trivializadora de $\mathcal{F}$ tal que $\overline{\mathcal{U}}$ é compacto então $\mathcal{U} \cap F$ contém um número finito de placas de $\mathcal{U}$.

c) A imersão $i: F \to M$, $i(x) = x$, é própria [ou seja todo cpcto $K \subset Y$ tem pré-imagem $f^{-1}(K)$ cpcta].

Em particular, se F é fechada então F é mergulhada.

demonstração: Seja F uma folha fechada de $\mathcal{F}$ e $(\mathcal{U}, \varphi)$ uma carta trivializadora de $\mathcal{F}$ com $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ tal que $\mathcal{U} \cap F \neq \emptyset$

Seja $D \subset \overline{D} \subset \mathcal{U}_2$ um disco tal que $\Sigma = \varphi^{-1}(\{x\} \times D)$ é uma secção transversal com $\overline{\Sigma} \subset \mathcal{U}$ e $\Sigma \cap F \neq \emptyset$.

Agora $\mathcal{U} \cap F$ tem no máximo uma qtdade enumerável de placas e, portanto, $\overline{\Sigma} \cap F$ é enumerável.

Como F é fechada, $\overline{F \cap \Sigma} = \overline{F} \cap \overline{\Sigma} = F \cap \overline{\Sigma}$ é enumerável.
Em particular:

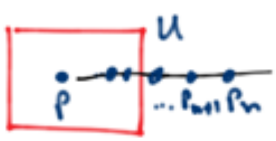
* $\operatorname{int}(\overline{\Sigma \cap F}) = \emptyset$

* $F \cap \overline{\Sigma}$ não é perfeito (pois conjuntos perfeitos são não enumeráveis)

Assim, pelo Teorema anterior segue que $F \cap \overline{\Sigma}$ é discreto e portanto finito (já que $\overline{\Sigma}$ é compacto). Ou seja $F \cap \varphi^{-1}(\mathcal{U}_1 \times D)$ contém um nº finito de placas de $\mathcal{U}$.
Tomando $\overline{\mathcal{U}}$ cpcto isto implica que $F \cap \mathcal{U}$ contém um número finito de placas.

Reciprocamente, suponhamos que para toda carta trivializadora $(\mathcal{U}, \varphi)$ de $\mathcal{F}$ com $\overline{\mathcal{U}}$ compacto, $\mathcal{U} \cap F$ contém um número finito de placas de $\mathcal{U}$.

Tome $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tal que $p_n \to p \in M$. Considere uma carta trivializadora ao redor de p; $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F}$, $p \in \mathcal{U}$ e tal que $\mathcal{U} \cap F$ contém um nº finito de placas.



Então $\exists$ placa α de $\mathcal{U}$ tal que $p_n \in \alpha$, $\forall\, n \geq n_0$ (grande). Logo $p \in \alpha$ pois α é fechada em $\mathcal{U}$. Portanto $p \in F \Rightarrow F$ é fechada.

Basta provar agora $(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b)$.

$(a) \Rightarrow (c)$. De fato, se F é fechada a aplicação $i: F \to M$ é um mergulho e a topologia intrínseca de F coincide com a topologia induzida pela topologia de M.

Além disso se $K \subset M$ é cpcto então $i^{-1}(K) = K \cap F$ é cpcto em M.

$(c) \Rightarrow (b)$ Se $i: F \to M$ é própria então dada $(\mathcal{U}, \varphi)$ carta trivializadora com $\overline{\mathcal{U}}$ compacto temos $i^{-1}(\overline{\mathcal{U}})$ compacto em F, isto é, $\overline{\mathcal{U}} \cap F$ é compacto em F, logo $\overline{\mathcal{U}} \cap F$ só pode ter um número finito de placas (caso contrário teríamos uma cobertura de $\overline{\mathcal{U}} \cap F$ por abertos de F − placas de $\mathcal{U}$ − que ñ admite subcob. finita).

Assim todas as afirmações são equivalentes c.q.d ∎

- Conjuntos Minimais das Folheações.

definição: Seja M uma variedade folheada por $\mathcal{F}$. Um subconjunto $\mu \subset M$ é minimal se satisfaz as seguintes propriedades:

a) μ é fechado, não vazio e invariante.

b) Se $\mu' \subset \mu$ é um subconjunto fechado e invariante então $\mu' = \emptyset$