# Orientabilidade & Orientabilidade transversal de folheações

definição: Seja $P$ um campo de $K$-planos em $M$. Dizemos que $\tilde{P}$ é um campo complementar a $P$ ou transversal a $P$ se, $\forall\, x \in M$

$$P(x) + \tilde{P}(x) = T_x M \quad \text{e} \quad P(x) \cap \tilde{P}(x) = \{0\}.$$

Construção de um campo complementar: Suponha que $P$ é um campo $C^r$ de $K$-planos dado em uma variedade suave $M$.

Fixe em $M$ uma métrica Riemanniana $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Coloquemos

$$P^{\perp}(x) = \{ v \in T_x M : \langle u, v \rangle_x = 0 \ , \forall\, u \in P(x) \}.$$

Então $P^{\perp}$ é um campo de $K$-planos complementar. Além disso $P^{\perp}$ é tb $C^r$.

· De fato, dado $x \in M$ considere $\mathcal{U} \ni x$ vizinhança de $x$ e $X^1, \dots, X^K$ campos $C^r$ definidos em $\mathcal{U}$ tq: $P(y) = \langle X^1(y), \dots, X^K(y) \rangle$, $y \in \mathcal{U}$.

Escreva $\quad X^i = \sum_{j=1}^{m} a^i_j \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ onde $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ vem de uma carta local $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de $M$.

Como os campos são $C^r$ em $M$ as funções: $a^i_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ são $C^r$.
Em particular $X^i$ é identificado com $(a^i_1, \dots, a^i_m)$ localmente.

Podemos então completar tais vetores p/ uma base de $\mathbb{R}^m$ e usar Gram-schmidt p/ obter base $C^r$ de $P^{\perp}$.

**Definição**: Seja $P$ um campo contínuo de $k$-planos. Dizemos que $P$ é transversal se existe um campo complementar a $P$, contínuo e orientável.

**Proposição**: Se $P$ é transversalmente orientável qualquer campo de planos contínuo e complementar a $P$ é orientável.

**prova**. Basta provar o seguinte: se $\tilde{P}$ é contínuo e complementar a $P$ então $\tilde{P}$ é orientável $\Longleftrightarrow$ $P^{\perp}$ é orientável.

Para $q \in M$ tome $A_q : T_qM \to P^{\perp}(q)$ a projeção ortogonal. Se $X$ é um campo de vetores contínuo em $M$, é fácil ver que:

$$Y(q) = A_q(X(q))$$

é tb um campo cont. de vetores em $P^{\perp}$.

Além disso, se $F \subset T_qM$ é plano complementar a $P$ então a restrição $A_q|F : F \to P^{\perp}(q)$ é isomorfismo.

Assim $A(q)|\tilde{P}(q) : \tilde{P}(q) \to P^{\perp}(q)$ é um isomorfismo e, portanto, induz uma bijeção entre as orientações de $\tilde{P}(q)$ e $P^{\perp}(q)$.

Mais precisamente, se $\Theta$ é uma orientação de $P^\perp(q)$ e $\{u_1,\dots,u_{n-k}\}\in\Theta$ então $A_q^*(\Theta)$ é a orientação determinada pela base $\{A_q^{-1}(v_1),\dots,A_q^{-1}(v_{n-k})\}$

Em particular, $\Theta$ é uma orient. contínua de $P^\perp$ se, e somente se $A^*(\Theta)$ definida por $A^*(\Theta)(q) = A_q^*(\Theta(q))$ for orient. contínua de $\widetilde{P}$ ∎

Teorema. Seja $P$ um campo de $K$-planos de classe $C^r$ em $M$. Valem as seguintes propriedades:

a) Se $P$ é orientável e transversalmente orientável, então $M$ é orientável

b) Se $M$ é orientável então $P$ é orientável $\Leftrightarrow$ $P$ é transv. orientável.

demonstração:

a) Seja $\Theta$ uma orientação contínua de $P$ e $\Theta^\perp$ uma orientação cont. de $P^\perp$.

Definimos uma orientação contínua $\overline{\Theta}$ em $M$ da seg. maneira: dado $q\in M$ consideremos $\{v_1,\dots,v_k\}\in\Theta(q)$ e $\{v_{k+1},\dots,v_n\}\in\Theta^\perp(q)$

Definimos $\overline{\Theta}(q)$ como sendo a classe de equivalência da base ordenada $\{v_1,\dots,v_n\}$. $\overline{\Theta}$ é uma orient. contínua.

b) Suponhamos que $M$ e $P$ sejam orientáveis. Sejam $\overline{\Theta}$ e $\Theta$ orientações contínuas de $M$ e $P$ respectivamente. Definimos uma orient. cont. $\Theta^\perp$ de $P^\perp$ da seguinte maneira: dado $q\in M$, seja $\{v_1,\dots,v_k\}\in\Theta(q)$ dizemos que $\{v_{k+1},\dots,v_n\}\in\Theta^\perp(q)$ se $\{v_1,\dots,v_n\}\in\overline{\Theta}(q)$.

Tal $\Theta^{\perp}$ é contínua ■

definição: Uma folheação $\mathcal{F}$ de classe $C^r$ $(r \geq 1)$ é orientável se o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ é orientável. Similarmente, $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável se $T\mathcal{F}$ for transversalmente orientável.

* Se $\mathcal{F}$ não é orientável, podemos considerar o rec. duplo orientável de $T\mathcal{F}$, $\pi^*(T\mathcal{F})$, onde $\pi : \tilde{M} \to M$.

Uma vez que $\pi$ é difeo local podemos definir a folheação $\pi^*(\mathcal{F})$ em $\tilde{M}$: seja $V = \{(x, \theta(x)) : x \in \mathcal{U}\}$ e $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ carta local de $\mathcal{F}$ defina $\tilde{\varphi} : V \to \mathbb{R}^m$ por

$$\tilde{\varphi}(x, \theta(x)) = (\varphi \circ \pi)(x, \theta(x)).$$

Neste caso se $\tilde{\varphi}_1 : V_1 \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\varphi}_2 : V_2 \to \mathbb{R}^n$ e $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ então:

$$\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} = \varphi \circ \pi \circ \pi^{-1} \circ \psi^{-1}(x,y) = \varphi \circ \psi^{-1}(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y)),$$

o que mostra que a família máxima de pares $(\tilde{V}, \tilde{\varphi})$ é um atlas $C^r$.

Além disso $\pi^*(T\mathcal{F})_x = D\pi(x)^{-1} \cdot T\mathcal{F}(\pi(x)) = D\pi(x)^{-1} \cdot T_{\pi(x)}\mathcal{F}$

Sejam $x \in \mathcal{U}$, $\pi(x) \in V$ tq $\pi|\mathcal{U} : \mathcal{U} \to V$ é difeo então, como

$\pi \mid \pi^*(\mathcal{F})(x) \cap \mathcal{U} : \pi^*(\mathcal{F})(x) \cap \mathcal{U} \to \mathcal{F}(\pi(x)) \cap V$ temos

$$D\pi(x)^{-1} : T_{\pi(x)}\mathcal{F} = T_x\, \pi^*(\mathcal{F}) .$$

Portanto $\boxed{T\pi^*(\mathcal{F}) = \pi^*(T\mathcal{F}) .}$

- Análogamente: se $\mathcal{F}$ não é transversalmente orientável, podemos trabalhar c/ o recobrimento duplo orientável $(\pi^\perp)^*(T\mathcal{F}^\perp)$ de $T\mathcal{F}^\perp$ (campo de planos complementar a $T\mathcal{F}$), onde $\pi^\perp : \tilde{M}^\perp \to M$ é a projeção do recobrimento.

A folheação $(\pi^\perp)^*(\mathcal{F})$ é transversalmente orientável.

- Orientabilidade Transversal via aplicações distinguidas

Seja $\mathcal{D} = \{f_i : U_i \to \mathbb{R}^k\}$, com $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ uma coleção de aplicações distinguidas associadas a uma folheação $\mathcal{F}$. Sejam $g_{ij}$, $i,j \in I$ os difeomorfismos locais tais que: $f_i = g_{ij} \circ f_j$ caso $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

definição: Dizemos que $\mathcal{D}$ é um sistema coerente de aplicações distinguidas se, $\forall\ i,j \in I$, $g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$ preserva a orientação canônica de $\mathbb{R}$, ou seja,

$\{Dg_{ij}(q)\cdot e_1, \dots, Dg_{ij}(q)\cdot e_k\}$ tem a mesma orientação que $\{e_1, \dots, e_k\}$.

**Teorema**. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe $C^r$ $(r \geq 1)$. Então $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável se, e somente se, $\mathcal{F}$ possui um sistema coerente de aplicações distinguidas.

**prova**. $(\Rightarrow)$ Seja $\mathcal{O}^\perp$ orient. contínua de $P^\perp$ (campo de planos ortogonal a $\mathcal{F}$). Seja $\mathcal{D} = \{(U_i, f_i, g_{ij}) : i, j \in I\}$ um sistema de aplic. distinguidas. Vamos construir um sistema coerente

$$\overline{\mathcal{D}} = \{(\overline{U_i}, \overline{f_i}, \overline{g_{ij}}) : i, j \in J\}.$$

Para cada $i \in I$ e cada $q \in U_i$, seja $A_q^i = Df_i(q) \,|\, P^\perp(q) : P^\perp(q) \to \mathbb{R}^k$
Como $P^\perp(q)$ é ortogonal a $\mathcal{F}$ em $q$, $A_q^i$ é isomorfismo: de fato

$$Df_i(q) : T_qM \longrightarrow \mathbb{R}^k \text{ é sobrejetora}$$

e $T_qM = P^\perp(q) \oplus T_q\mathcal{F}$; como $Df(q).T_q\mathcal{F} = 0$ segue que $A_q^i$ é iso.

- Seja $\{u_1, \dots, u_k\} \in \mathcal{O}^\perp(q)$.

1. Se a base $\{A_q^i(u_1), \dots, A_q^i(u_k)\}$ tem a mesma orientação que a base canônica de $\mathbb{R}^k$ definimos $\overline{f}_i(q) = f_i(q)$

2. Caso contrário definimos $\overline{f}_i(q) = R(f_i(q))$ onde $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é $R(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Como $\mathcal{O}^\perp$ é uma orientação contínua temos que:

* se $\bar{f}_i(q) = f_i(q)$ para algum $q \in \mathcal{U}_i$ então $\bar{f}_i \equiv f_i$ em $\mathcal{U}_i$ uma vez que $\mathcal{U}_i$ é conexo.

* se $\bar{f}_i(q) = R \circ f_i(q)$ p/ algum $q \in \mathcal{U}_i$ então $\bar{f}_i \equiv R \circ f_i$ em $\mathcal{U}_i$.

Finalmente definimos os difeomorfismos de transição da seguinte forma:

1) $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$ caso $\bar{f}_i = f_i$ e $\bar{f}_j = f_j$

2) $\bar{g}_{ij} = g_{ij} \circ R$ caso $\bar{f}_i = f_i$ e $\bar{f}_j = R \circ f_j$

3) $\bar{g}_{ij} = R \circ g_{ij}$ caso $\bar{f}_i = R \circ f_i$ e $\bar{f}_j = f_j$.

4) $\bar{g}_{ij} = R \circ g_{ij} \circ R$ se $\bar{f}_i = R \circ f_i$ e $\bar{f}_j = R \circ f_j$.

É fácil ver que o sistema $(\bar{\mathcal{U}}_i = \mathcal{U}_i, \bar{f}_i, \bar{g}_{ij})$ é um sistema de op. distinguidas para $\mathcal{F}$ e, além disso, se $\mathcal{B}$ é uma base de $P^\perp(q)$ em $\mathcal{O}^\perp(q)$ então

$$\bar{A}^i_q = D\bar{f}_i(q) \mid P^\perp(q) \text{ leva } \mathcal{B} \text{ em uma base } \mathcal{C}$$

de $\mathbb{R}^k$ com a mesma orientação da base canônica de $\mathbb{R}^k$.

Logo, se $x = \bar{f}_j(q)$ então $D\bar{g}_{ij}(x) = \bar{A}^i_q \circ (\bar{A}^j_q)^{-1}$ leva a base canônica de $\mathbb{R}^k$ numa base com a mesma orientação c.q.d.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{F}$ possui um sistema de aplicações distinguidas $\mathcal{D} = \{ f_i : U_i \to \mathbb{R}^k \mid i \in I \}$, consideremos em $P^\perp$ a orientação $\mathcal{O}^\perp$ induzida por $A_q^i = Df_i \mid P^\perp$ e pela orient. canônica do $\mathbb{R}^k$, isto é:

$$\{u_1, \dots, u_k\} \in \mathcal{O}^\perp(q) \iff \{A_q^i(u_1), \dots, A_q^i(u_k)\} \text{ tem a orientação da base canônica do } \mathbb{R}^k.$$

Assim $\mathcal{O}^\perp$ é uma orientação contínua de $P^\perp$ pois se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então para $q \in U_i \cap U_j$ temos:

$$\mathcal{O}_i^\perp \ni \{(A_q^i)^{-1} \cdot e_1, \dots, (A_q^i)^{-1} \cdot e_k\}$$

$$\mathcal{O}_j^\perp \ni \{(A_q^j)^{-1} \cdot e_1, \dots, (A_q^j)^{-1} \cdot e_k\}$$

e a matriz mudança de base (entre essas bases) é a matriz mudança de base entre $\{e_1, \dots, e_k\}$ e $\{Dg_{ij}(q) \cdot e_1, \dots, Dg_{ij}(q) \cdot e_k\}$ que, por hipótese, tem determinante positivo ■

# Topologia Das Folhas

Seja $M^m$ uma variedade folheada por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão $n < m$.

Definimos o **espaço das folhas** de $\mathcal{F}$, $M/\mathcal{F}$, como sendo o quociente de $M$ pela seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \iff \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y).$$

Em $M/\mathcal{F}$ consideramos a topologia quociente.

<u>definição</u>: Seja $A \subset M$. O saturado de $A$ por $\mathcal{F}$ é o conjunto

$$\mathcal{F}(A) = \{x \in M \mid x \sim y \ \text{p/ algum } y \in A\}$$

$$= \bigcup_{x \in A} \mathcal{F}(x).$$

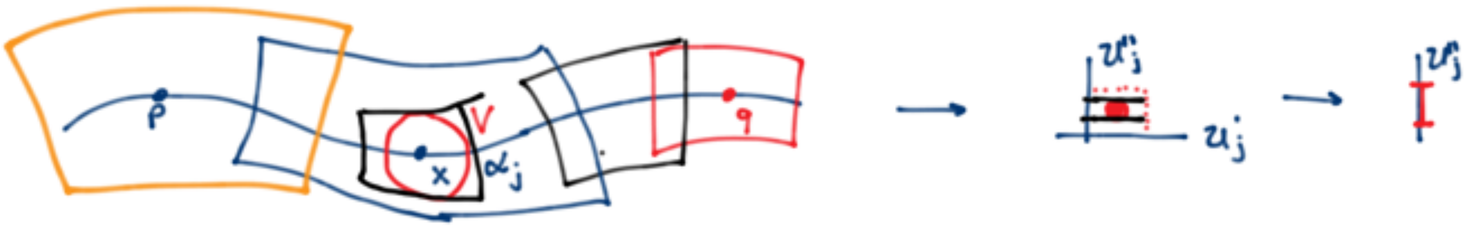
Seja $\pi : M \to M/\mathcal{F}$ a projeção quociente então:

$$\mathcal{F}(A) = \pi^{-1}(\pi(A)).$$

<u>Teorema</u>. A projeção $\pi$ é uma aplicação aberta, ou seja, o saturado $\mathcal{F}(A)$ de um subconjunto aberto $A$ de $M$ é aberto.

prova. Sejam $p \in \mathcal{F}(A)$ e $F$ a folha de $\mathcal{F}$ por $p$. Então $F \cap A \neq \emptyset$


e se $q \in F \cap A$ então existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que $q \in \alpha_1$ e $p \in \alpha_k$. Suponhamos que cada $\alpha_j$ é placa de $(\mathcal{U}_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ e coloquemos $\varphi_j(\mathcal{U}_j) = U_j' \times U_j''$, $U_j' \subset \mathbb{R}^n$, $U_j'' \subset \mathbb{R}^{m-n}$ discos abertos. $j = 1, \dots, k$.




Suponhamos que para algum $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ existe $x \in \alpha_j$ que possui uma vizinhança aberta $V \subset \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{U}_j$. Como $\varphi_j : \mathcal{U}_j \to U_j' \times U_j''$ é homeo

$\varphi_j(V)$ é aberto de $U_j' \times U_j''$, logo se $\pi_2 : U_j' \times U_j'' \to U_j''$ é a segunda projeção então $\pi_2^{-1}(\pi_2 \circ \varphi_j(V))$ é aberto em $U_j' \times U_j''$.

Assim $\quad W = \varphi_j^{-1}(\pi_2^{-1} \circ (\pi_2 \circ \varphi_j(V)))$ é aberto e $\alpha_j \subset W \subset \mathcal{F}(A)$, o que mostra que $\alpha_j$ está no interior de $\mathcal{F}(A)$.

- Como $A$ é aberto $\alpha_1$ está no interior de $\mathcal{F}(A)$. Logo $\alpha_1 \cap \alpha_2 \subset \operatorname{int}(\mathcal{F}(A))$. Mas então, pelo argumento anterior $\alpha_2 \subset \operatorname{int}(\mathcal{F}(A))$ e assim por diante até concluirmos que $p \in \alpha_k \subset \operatorname{int}(\mathcal{F}(A))$. Logo $\mathcal{F}(A)$ é aberto ∎

**definição**: Dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é invariante ou saturado por $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F}(A) = A$, ou seja, $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$.

**Teorema**. Seja $A \subset M$ um subconjunto invariante por $\mathcal{F}$. Então o seu interior $\mathring{A}$, seu fecho $\bar{A}$ e sua fronteira $\partial A$ tb são invariantes por $\mathcal{F}$.

**Prova**. $\mathring{A}$ = maior aberto contido em $A$.

Como $\pi$ é aberta, o conjunto $B = \pi^{-1}(\pi(A^\circ)) \subset \pi^{-1}(\pi(A)) = A$ é aberto. Logo $B \subset A^\circ$ $\therefore$ $\pi^{-1}(\pi(A^\circ)) = A^\circ$.

Agora, se $A$ é invariante então $M - A$ tb é. Logo $\text{int}(M-A)$ tb é. Mas $\text{int}(M-A) = M - \bar{A}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ é invariante.

Como $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$ então $\partial A$ tb é invariante ∎

## - Uniformidade Transversal

Seja $\Sigma$ uma subvariedade de $M$. Dizemos que $\Sigma$ é transversal a $\mathcal{F}$ quando $\Sigma$ é transversal a TODAS as folhas de $\mathcal{F}$.

**definição**. Se $\Sigma$ for transversal a $\mathcal{F}$ e $\dim \Sigma + \dim \mathcal{F} = \dim M$, dizemos que $\Sigma$ é uma seção transversal de $\mathcal{F}$.