definição : Diz-se que um campo de planos P é involutivo se, dados dois campos de vetores X e Y tais que, para todo $q \in M$, $X(q)$ e $Y(q) \in P(q)$ então

$$[X, Y](q) = P(q).$$

Teorema de Frobenius. Seja P um campo de k-planos de classe C^r $r \geq 1$, em M. Se P é involutivo então existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e classe C^r em M tal que $T_q(\mathcal{F}) = P(q)$ para todo $q \in M$. Recipsocamente, se $\mathcal{F}$ é folheação C^r $(r \geq 2)$ e P é o campo de planos tg a $\mathcal{F}$, então P é involutivo.

Orientação

Lembrando : Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, dizemos que duas bases ordenadas de E

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\},$$

definem a mesma orientação em E se a matriz de mudança de base $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definida por :

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$$

tem determinante positivo.

* $\mathcal{B}$ = cjto das bases ordenadas em E

Em $\mathcal{B}$ temos a relação "$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Leftrightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ tem a mesma orientação".

Esta relação é uma relação de equivalência com apenas duas classes. Estas classes são chamadas de Orientações de E.

definição: Seja P um campo de k-planos contínuo em M. Dizemos que P é orientável se, para cada $x \in M$, podemos escolher uma orientação $\mathcal{O}(x)$ em $P(x)$ de tal forma que a aplicação

$$x \longmapsto \mathcal{O}(x)$$

seja contínua.

Em que sentido queremos que $x \mapsto \mathcal{O}(x)$ seja contínua?

Consideremos uma cobertura de M por abertos $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ tal que, para cada $i \in I$, a restrição $P|\mathcal{U}_i$ é definida por k campos de vetores contínuos $X^1, \dots, X^k$. Para cada $x \in \mathcal{U}_i$, as bases

$$\mathcal{B}(x) = \{X^1(x), \dots, X^k(x)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}'(x) = \{-X^1(x), X^2(x), \dots, X^k(x)\}$$

definem duas orientações distintas, digamos: $\mathcal{O}_i^+(x)$ e $\mathcal{O}_i^-(x)$.

Dizemos que $x \mapsto \mathcal{O}(x)$ é contínua se $\mathcal{O}|\mathcal{U}_i = \mathcal{O}_i^+$, $\forall i$ e sempre que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ tivermos $\mathcal{O}_i^+ = \mathcal{O}_j^+$ na interseção.

Se $P(x) = T_x M$ e P for orientável dizemos que M é orientável.

– Recobrimento Duplo Orientável

Sejam $\tilde{M} = \{ (x, \mathcal{O}) : x \in M \text{ e } \mathcal{O} \text{ é uma orientação de } P(x) \}$

$$\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$$
$$(x, \mathcal{O}) \longrightarrow x$$

Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x) = \{ (x, \mathcal{O}) , (x, -\mathcal{O}) \}$.

Em M consideramos a topologia cuja base de abertos é construída da seguinte forma:

Dado $(x_0, \mathcal{O}_0) \in \tilde{M}$, seja $\mathcal{U}$ vizinhança de x_0 em M onde está definida uma orientação contínua $\mathcal{O}$ de $P|\mathcal{U}$. Podemos supor $\mathcal{O}(x_0) = \mathcal{O}_0$.

Definimos então uma vizinhança de $(x_0, \mathcal{O}_0)$ como:

$$V = \{ (x, \mathcal{O}(x)) \mid x \in \mathcal{U} \}.$$

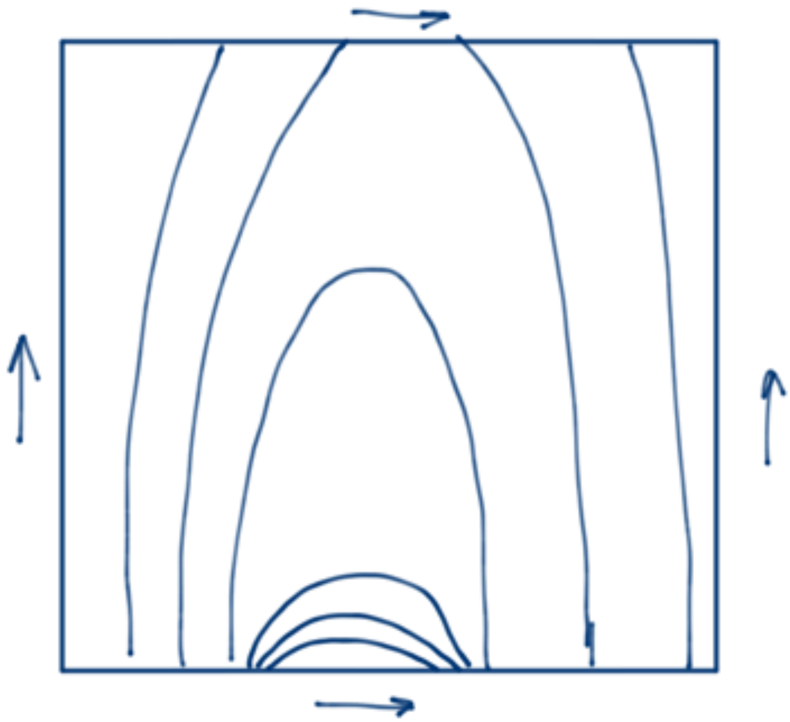
Com esta topologia $\pi : \tilde{M} \to M$ é um recobrimento de duas folhas, ou seja $\pi^{-1}(x)$ tem dois elementos.

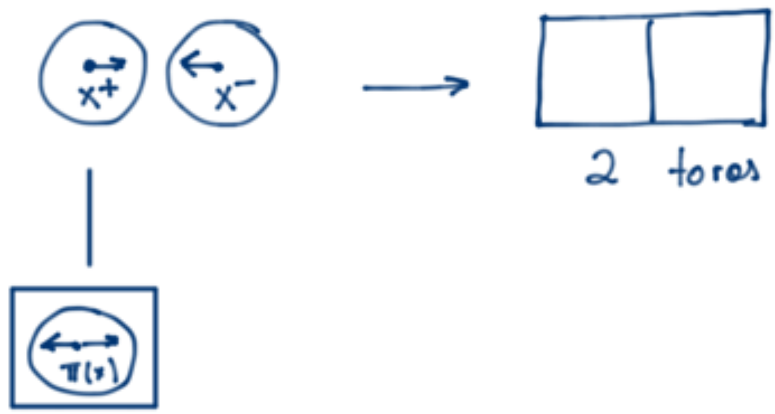
• Como π é um homeo local podemos definir uma estrutura C^∞ em $\tilde{M}$, compatível com a top. co-induzida por π e tal que π é difeo local C^∞.

definição: O recobrimento duplo orientável de P é o campo de k-planos $\pi^*(P)$ dado por

$$\pi^*(P)_x = D\pi(x)^{-1} \cdot P(\pi(x)).$$

Exemplo. $M = \mathbb{T}^2$, P = campo não orientável tg à seguinte $\mathcal{F}$





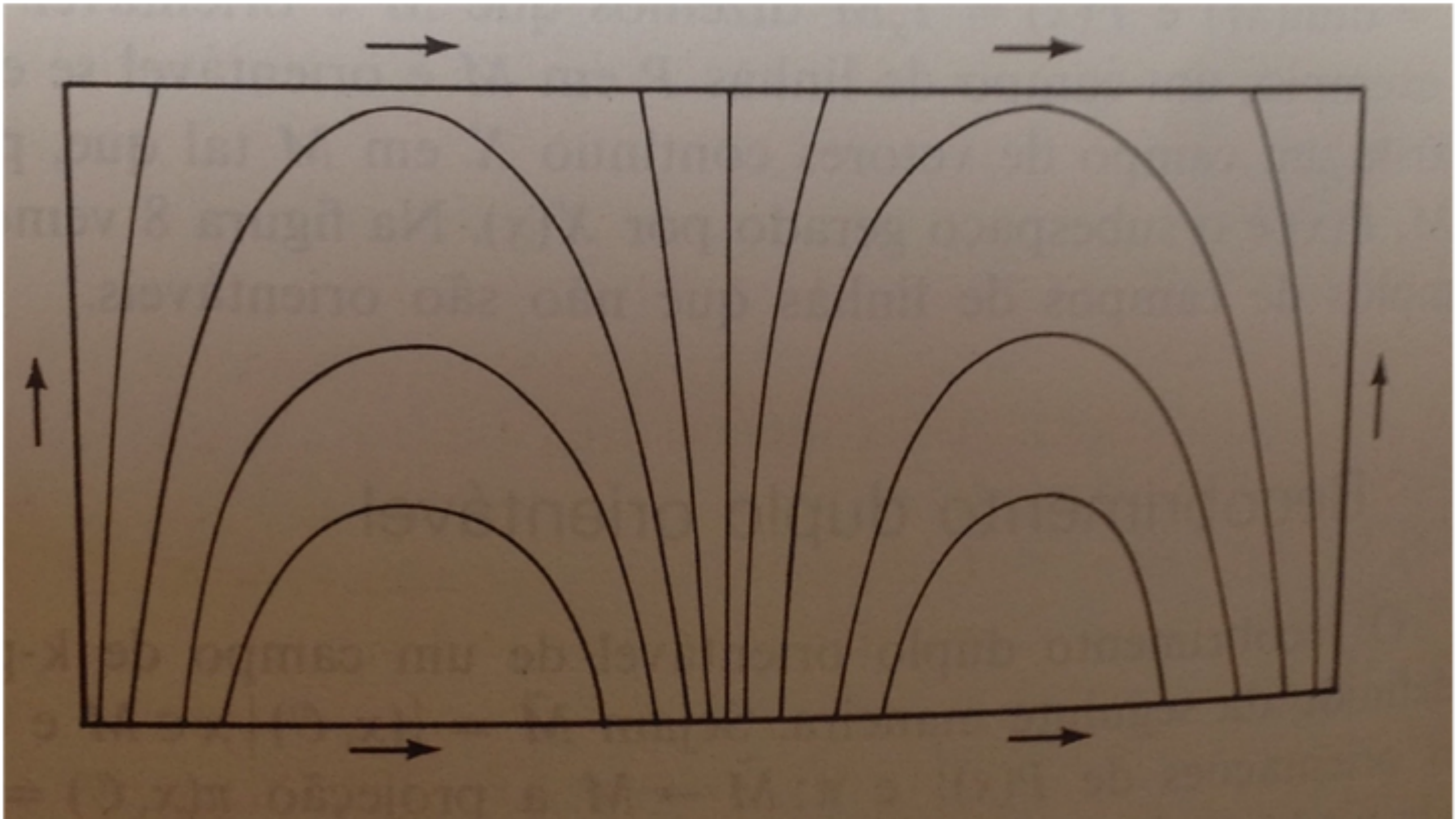


Figura 9.b

Teorema. Suponhamos que M é uma variedade conexa e seja P um campo de k-planos contínuo em M. Seja $(\tilde{M}, \pi, \pi^*(P))$ o recobrimento duplo de P. Então:

a) $\pi^*(P)$ é orientável

b) $\tilde{M}$ é conexa se, e somente se, P é não orientável.

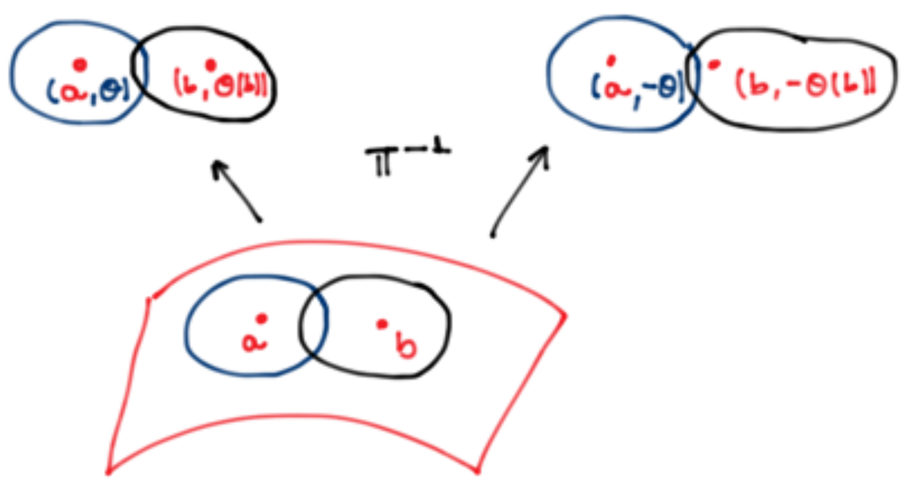
Prova.

a) Por definição $\pi^*(P)(x,\theta) = (D\pi(x,\theta))^{-1} \cdot P(x)$, se $(x,\theta) \in \tilde{M}$.

Defina uma orientação Θ^* para $\pi^*(P)$ da seguinte forma:

uma base $\{X^1(x,\theta), \ldots, X^k(x,\theta)\}$ de $\pi^*(P)(x,\theta)$ está em Θ^* se a base $\{D\pi(x,\theta) \cdot X^1(x,\theta); \ldots; D\pi(x,\theta) \cdot X^k(x,\theta)\}$ está em Θ.

Θ^* é uma orientação contínua de $\pi^*(P)$.



b) ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\tilde{M}$ é conexa.

Dado $x_0 \in M$ consideremos um caminho contínuo $\gamma^*: [0,1] \to \tilde{M}$ tal que $\gamma^*(0) = (x_0, \theta_0)$ e $\gamma^*(1) = (x_0, -\theta_0)$, onde θ_0 é uma orientação fixada em $P(x_0)$ e $-\theta_0$ é a orientação oposta.

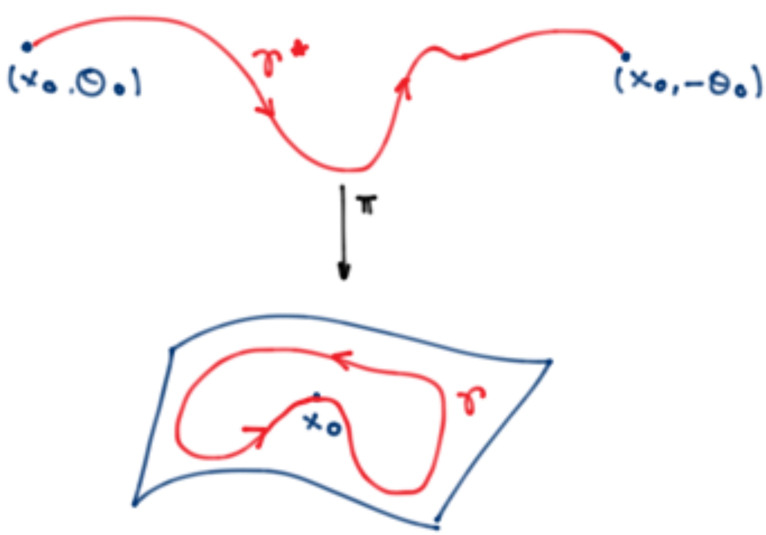
Seja $\gamma = \pi \circ \gamma^*$. Então γ é um caminho fechado em M com

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 .$$

Suponhamos que P fosse orientável com uma orientação θ. Podemos assumir s.p.g que $\theta(x_0) = \theta_0$.

Neste caso o caminho $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \theta(\gamma(t)))$ satisfaz $\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0,1]$ e $\tilde{\gamma}(0) = (x_0, \theta_0) = \gamma^*(0)$.

Isso implica que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma^*(t)$, $\forall\, t \in [0,1]$ (Unicidade do levantamento) mas aí: $\tilde{\gamma}(1) = \gamma^*(1)$ $\therefore$ $(x_0, \theta_0) = (x_0, -\theta_0)$ absurdo.



Suponhamos agora que $\tilde{M}$ é desconexa. Seja $\tilde{M}_1$ uma componente conexa de $\tilde{M}$ devemos ter

$\pi(\tilde{M}_1) = M$ já que π é difeo local e

M é conexa.

Isto implica que $\tilde{M}$ tem exatamente duas componentes conexas: $\tilde{M}_1$ e $\tilde{M}_2$. Observe que: $(x,\theta) \in \tilde{M}_1 \Leftrightarrow (x,-\theta) \in \tilde{M}_2$. Logo a projeção $h = \pi|\tilde{M}_1 : \tilde{M}_1 \to M$ é bijetora e, portanto, é um difeo.

Como $\pi^*(P)$ é orientável, $\pi^*(P)|\tilde{M}_1$ tb é orientável e induz uma orientação contínua em P através de $h^{-1} : M \to \tilde{M}_1$ ∎

Corolário. Se M é simplesmente conexa então todo campo de K-planos $(1 \leq K \leq \dim(M))$ é orientável. Em particular M é orientável.

prova. Suponha que P é um campo de K-planos não orientável. Considere $(\tilde{M}, \pi^*(P))$ o recobrimento duplo orientável de P.

Como P é não orientável, $\tilde{M}$ é conexa então existe um arco $\gamma : [0,1] \to \tilde{M}$ tal que $\gamma(0) = (x_0, \theta_0)$ e $\gamma(1) = (x_0, -\theta_0)$.

Agora $\pi \circ \gamma$ é um loop em M que se levanta (unicamente) em γ. Como M é simplesmente conexa, $\pi \circ \gamma$ é homotopicamente trivial logo γ é hom. trivial [Vide Corolário 2. Ap 1]. Mas isso é um absurdo pois γ não é um loop ∎

Orientabilidade & Orientabilidade transversal de folheações

definição: Seja P um campo de K-planos em M. Dizemos que $\tilde{P}$ é um campo complementar a P ou transversal a P se, $\forall\, x \in M$

$$P(x) + \tilde{P}(x) = T_x M \quad \text{e} \quad P(x) \cap \tilde{P}(x) = \{0\}.$$

Construção de um campo complementar: Suponha que P é um campo C^r de K-planos dado em uma variedade suave M.

Fixe em M uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Coloquemos

$$P^{\perp}(x) = \{ v \in T_x M : \langle u, v \rangle_x = 0 \,,\ \forall\, u \in P(x) \}.$$

Então $P^{\perp}$ é um campo de K-planos complementar. Além disso $P^{\perp}$ é tb C^r.

· De fato, dado $x \in M$ considere $\mathcal{U} \ni x$ vizinhança de x e $X^1, \dots, X^K$ campos C^r definidos em $\mathcal{U}$ tq: $P(y) = \langle X^1(y), \dots, X^K(y) \rangle$, $y \in \mathcal{U}$.

Escreva $\displaystyle X^i = \sum_{j=1}^{m} a^i_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$ onde $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ vem de uma carta local $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de M.

Como os campos são C^r em M as funções: $a^i_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ são C^r.
Em particular X^i é identificado com $(a^i_1, \dots, a^i_m)$ localmente.

Podemos então completar tais vetores p/ uma base de $\mathbb{R}^m$ e usar Gram-schmidt p/ obter base C^r de $P^{\perp}$.

Definição: Seja P um campo contínuo de k-planos. Dizemos que P é transversal se existe um campo complementar a P, contínuo e orientável.

Proposição: Se P é transversalmente orientável qualquer campo de planos contínuo e complementar a P é orientável.

prova. Basta provar o seguinte: se $\tilde{P}$ é contínuo e complementar a P então $\tilde{P}$ é orientável $\iff P^{\perp}$ é orientável.

Para $q \in M$ tome $A_q : T_qM \to P^{\perp}(q)$ a projeção ortogonal. Se X é um campo de vetores contínuo em M, é fácil ver que:

$$Y(q) = A_q(X(q))$$

é tb um campo cont. de vetores em $P^{\perp}$.

Além disso, se $F \subset T_qM$ é plano complementar a P então a restrição $A_q|F : F \to P^{\perp}(q)$ é isomorfismo.

Assim $A(q)|\tilde{P}(q) : \tilde{P}(q) \to P^{\perp}(q)$ é um isomorfismo e, portanto, induz uma bijeção entre as orientações de $\tilde{P}(q)$ e $P^{\perp}(q)$.