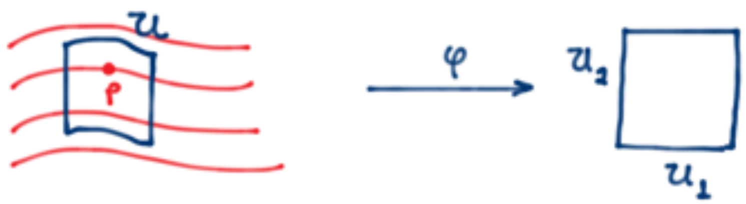
As Folhas

No que segue procuraremos entender como é a topologia intrínseca das folhas de uma folheação.

- Topologia Intrínseca de uma folha

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação C^r e $F \in \mathcal{F}$ uma folha de $\mathcal{F}$. Dado $p \in F$ considere $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F}$ tal que $p \in \mathcal{U}$:



, $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ onde $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^s$ são bolas abertas.

Escreva $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ onde $\varphi_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^s$ e considere α a placa de $\mathcal{U}$ que contém p.

Defina $\bar{\varphi} : \alpha \to \mathbb{R}^n$ por $\bar{\varphi} = \varphi_1|_\alpha$. Assim $\bar{\varphi} : \alpha \to \mathcal{U}_1$ é um homeomorfismo. Agora defina:

$$\mathcal{B} = \{ (\alpha, \bar{\varphi}) : \alpha \subset F \text{ é uma placa de } \mathcal{U} \text{ com } (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F} \}.$$

Afirmação: $\mathcal{B}$ é um atlas C^r de dimensão n para F.

Precisamos verificar que: se $(\alpha, \bar{\varphi})$, $(\beta, \bar{\psi}) \in \mathcal{B}$ são tais que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ então $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ e $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$ e

$$\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1} : \bar{\psi}(\alpha \cap \beta) \to \bar{\varphi}(\alpha \cap \beta) \quad \text{é} \quad C^r \text{ difeo.}$$

Passo 1. $\alpha \cap \beta$ é aberto em α e em β

Sejam (U, φ), (V, ψ) tais que $\bar{\varphi} = \varphi_1|\alpha$, $\bar{\psi} = \psi_1|\beta$ sabemos que

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s,$$

com $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$.

Como $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, dado $(x,b) \in \psi(\alpha \cap \beta)$ temos:

$$\varphi \circ \underbrace{\psi^{-1}(x,b)}_{\in\, \alpha \cap \beta} = (h_1(x,b), h_2(b)) = (h_1(x,b), a) \quad \text{onde } \pi_2 \circ \varphi(\alpha) = a.$$

$(\ast\ast)$

Como β é placa de V temos: $\psi(U \cap \beta) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\})$ e, similarmente, $\varphi(\alpha \cap V) = \varphi(U \cap V) \cap (\{a\} \times \mathbb{R}^s)$.

Logo, por $(\ast\ast)$ temos:

$$\varphi(\beta \cap U) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(\beta \cap U)) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{b\}))$$

$$\subset \varphi(U \cap V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{a\}) = \varphi(\alpha \cap V).$$

Ou seja $\beta \cap \mathcal{U} \subset \alpha \cap V$. Analogamente $\alpha \cap V \subset \beta \cap \mathcal{U}$ $\therefore$

$\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap \mathcal{U}$ demonstrando o que queríamos.

Passo 2. Como $\bar{\varphi}$ e $\bar{\psi}$ são homeos segue que $\bar{\varphi}(\alpha \cap \beta)$, $\bar{\psi}(\alpha \cap \beta)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$.

Passo 3. A aplicação $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1}$ é C^r.

De fato $\bar{\psi}^{-1} = \psi^{-1}(id, b)$, logo por (**) temos:

$$\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}^{-1}(x) = \bar{\varphi} \circ \psi^{-1}(x,b) = \pi_1 \circ \varphi \circ \psi^{-1}(x,b) = h_1(x,b)$$

que é C^r difeo já que $\varphi \circ \psi^{-1}$ o é.

Assim $\mathcal{B}$ é um atlas para F.

- Observe que ainda faltaria provar o seguinte: F tem base enumerável de abertos.

Exercício para entregar: Mostre que F tem base enumerável de abertos.

Obs. Na topologia de F associada a $\mathcal{B}$ o cjto de todas as placas $\alpha \subset F$ forma uma base de abertos de F.

Obs 2. A topologia intrínseca não coincide, no caso qual, com a top. induzida em F por M.

Teorema. Seja M uma variedade folheada por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão n e classe C^r. Toda folha $F \in \mathcal{F}$ possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão n, tal que os domínios das cartas locais são placas de $\mathcal{F}$. A aplicação $i : F \to M$ definida por $i(p) = p$ é uma imersão biunívoca de classe C^r, quando em F consideramos a estrutura de variedade intrínseca. Além disso F é subvariedade C^r de M se, e somente se, i é um mergulho.

Aplicações Distinguidas.

No que segue introduziremos ferramentas para estudar a estrutura transversal de uma folheação.

definição alternativa de folheação: Uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão s e classe C^r está definida por uma coleção máxima de pares (U_i, f_i), $i \in I$, onde os U_i's são abertos em M e as funções $f_i : U_i \to \mathbb{R}^s$ são submersões satisfazendo:

(1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$

(2) se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe um difeo. local g_{ij} de classe C^r de $\mathbb{R}^s$ tal que $f_i = g_{ij} \circ f_j$ em $U_i \cap U_j$.

As f_i são chamadas aplicações distinguidas de $\mathcal{F}$. As componentes conexas dos conjuntos $f_i^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^s$ são chamadas placas de $\mathcal{F}$.

Exercício. Mostre que as duas definições de folheação são equivalentes.

definição. Seja N uma variedade. Dizemos que $g : N \to M$ é transversal a $\mathcal{F}$ quando g é transversal a todas as folhas $F \in \mathcal{F}$, ou seja, se $p \in N$ então: $Dg(p) \cdot T_pN + T_{g(p)}\mathcal{F}(g(p)) = T_{g(p)}M$.

Notação: As vezes denotaremos $T_q(\mathcal{F}) := T_q\,\mathcal{F}(q)$.

Teorema. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em M de classe C^r $(r \geq 1)$ e $g: N \to M$ uma aplicação C^r. Então g é transversal a $\mathcal{F}$ se, e somente se, para toda aplicação distinguida $(\mathcal{U}, f)$ de $\mathcal{F}$ a composição $f \circ g : g^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}^s$ é uma submersão.

prova: Suponhamos que g é transversal a $\mathcal{F}$ e $(\mathcal{U}, f)$ ap. distinguida de $\mathcal{F}$. Se $p \in \mathcal{U}$ e $q = g(p)$ temos $T_q M = T_q(\mathcal{F}) + Dg(p).T_p N$.

Aplicando $Df(q) : T_q M \to \mathbb{R}^s$ a ambos os lados e usando a regra da cadeia temos:

$$\mathbb{R}^s = Df(q).T_q M = Df(q).T_q(\mathcal{F}) + D(f \circ g)(p).T_p N.$$

Como f é constante na placa de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{U}$ que passa por q então $Df(q).T_q(\mathcal{F}) = 0$. Logo $\mathbb{R}^s = D(f \circ g)(p).T_p N \Longrightarrow f \circ g$ é submersão.

$(\Leftarrow)$ Consideremos $p \in N$ e ap. distinguida $(\mathcal{U}, f) \in \mathcal{F}$ tal que $g(p) = q \in \mathcal{U}$. Pela hipótese temos que $Df(q).Dg(p).T_p N = \mathbb{R}^s$. Em particular isto implica que $Df(q) \mid Dg(p).T_p N$ é sobre $\mathbb{R}^s$. Portanto existe um subespaço

$$E \subset Dg(p).T_p N, \quad \dim E = s$$

e tal que $Df(q) \mid E : E \to \mathbb{R}^s$ é isomorfismo.

Agora, como $Df(q)^{-1}(0) = T_q(\mathcal{F})$ então $E \cap T_q(\mathcal{F}) = \{0\}$. Logo,

$$T_q M = E \oplus T_q(\mathcal{F}) \quad \text{já que } \dim E = s = \operatorname{cod}(T_q(\mathcal{F})).$$

Portanto $T_q M = Dg(p) \cdot T_p N + T_q(\mathcal{F})$ c.q.d 👍

Uma consequência imediata é o seguinte teorema:

Teorema. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em M de classe C^r e $g: N \to M$, de classe C^r, transversal a $\mathcal{F}$. Então existe uma única folheação $g^*(\mathcal{F})$ em N de classe C^r e codimensão $\operatorname{cod}(\mathcal{F})$, cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos $g^{-1}(F)$, F folha de $\mathcal{F}$.

prova. Seja $\{(\mathcal{U}_i, f_i, g_{ij}) : f_i = g_{ij} \circ f_j\}$ um sistema de ap. distinguidas de $\mathcal{F}$.
Então o sistema $\{(g^{-1}(\mathcal{U}_i), f_i \circ g, g_{ij}\}$ é um sistema de aplicações distinguidas de classe C^r de uma folheação $g^*(\mathcal{F})$ de N.

Além disso se $F \in \mathcal{F}$ e α é placa de $F \cap \mathcal{U}_i$ então as comp. conexas de $g^{-1}(\alpha) = g^{-1}(f_i^{-1}(c))$ são placas de $g^*(\mathcal{F})$. Logo $g^{-1}(F)$ é uma união de folhas de $g^*(\mathcal{F})$. Portanto as folhas de $g^*(\mathcal{F})$ são comp. conexas de $g^{-1}(F)$, $F \in \mathcal{F}$. ∎

Campos de Planos & Folheações.

definição: Um campo de K-planos em uma variedade M é uma aplicação P que associa a cada $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão K de $T_q M$.

Um campo de 1-planos é tb chamado campo de linhas.

Um campo de linhas é dito C^r se para todo $q \in M$ existe um campo de vetores X, de classe C^r, definido numa vizinhança V de q tal que:

$$P(x) = \mathbb{R} \cdot X(x), \ \forall x \in V.$$

definição: Dizemos que um campo de K-planos P em M é C^r se para todo $q \in M$ existem K campos de vetores C^r, $X^1, \dots, X^K$, definidos numa vizinhança V de q tais que para todo $x \in V$, $\{X^1(x), \dots, X^K(x)\}$ é base de $P(x)$.

Proposição. Toda folheação $\mathcal{F}$ de dimensão K e classe C^r, $r \geq 1$, em M define um campo de K-planos de classe C^{r-1} em M, o qual será denotado por $T\mathcal{F}$.

Prova. Seja $P(x) = T_x \mathcal{F}$ o subespaço de $T_x M$ tangente à $\mathcal{F}(x)$ em x. Dado $x_0 \in M$ tome $(\mathcal{U}, \varphi)$, $x_0 \in \mathcal{U}$, carta local de $\mathcal{F}$.

Para cada $x \in \mathcal{U}$, $P(x)$ é o espaço gerado por:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(x) = (D\varphi(x))^{-1} \cdot e_i \quad : \quad i = 1, 2, \dots, K \right\}$$

Como φ é C^r, os campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, K$ são C^{r-1} $\therefore$ P é C^{r-1} ∎

Exemplo. A esfera S^5 não possui um campo de 2-planos contínuo, logo não existem folheações de dimensão 2 em S^5.

Pergunta: Dado um campo de K-planos P em M, sob que condições existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão K tal que $T_q\mathcal{F} = P(q)$, $\forall q \in M$?

definição: Sejam X e Y dois campos de vetores de classe C^r, defina:

$$p \in M, t \in \mathbb{R}, \qquad X_t^*(Y)(p) = DX_{-t}(X_t(p)) \cdot Y(X_t(p)) \in T_pM$$

onde X_t é o fluxo de X.

O colchete de Lie entre X e Y é o campo de vetores $[X, Y]$ definido por

$$[X, Y](p) = \frac{d}{dt}\left(X_t^*(Y)\right)_{t=0}.$$

definição: Diz-se que um campo de planos P é involutivo se, dados dois campos de vetores X e Y tais que, para todo $q \in M$, $X(q)$ e $Y(q) \in P(q)$ então

$$[X, Y](q) = P(q).$$

Teorema de Frobenius. Seja P um campo de k-planos de classe C^r $r \geq 1$, em M. Se P é involutivo então existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e classe C^r em M tal que $T_q(\mathcal{F}) = P(q)$ para todo $q \in M$. Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é folheação C^r $(r \geq 1)$ e P é o campo de planos tg a $\mathcal{F}$, então P é involutivo.

Orientação

Lembrando: Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, dizemos que duas bases ordenadas de E

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\},$$

definem a mesma orientação em E se a matriz de mudança de base $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definida por:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$$

tem determinante positivo.