Teorema de Sard. Seja $f: M \to N$ de classe C^∞. Então o conjunto dos valores críticos tem medida de Lebesgue nula.

Em particular o cjto dos valores regulares é denso.

- Transversalidade.

- $f: M \to N$ $C^r (r \geq 1)$, $S \subset N$ subvariedade de N.

definição: Dizemos que f é transversal a S em $x \in M$ se:

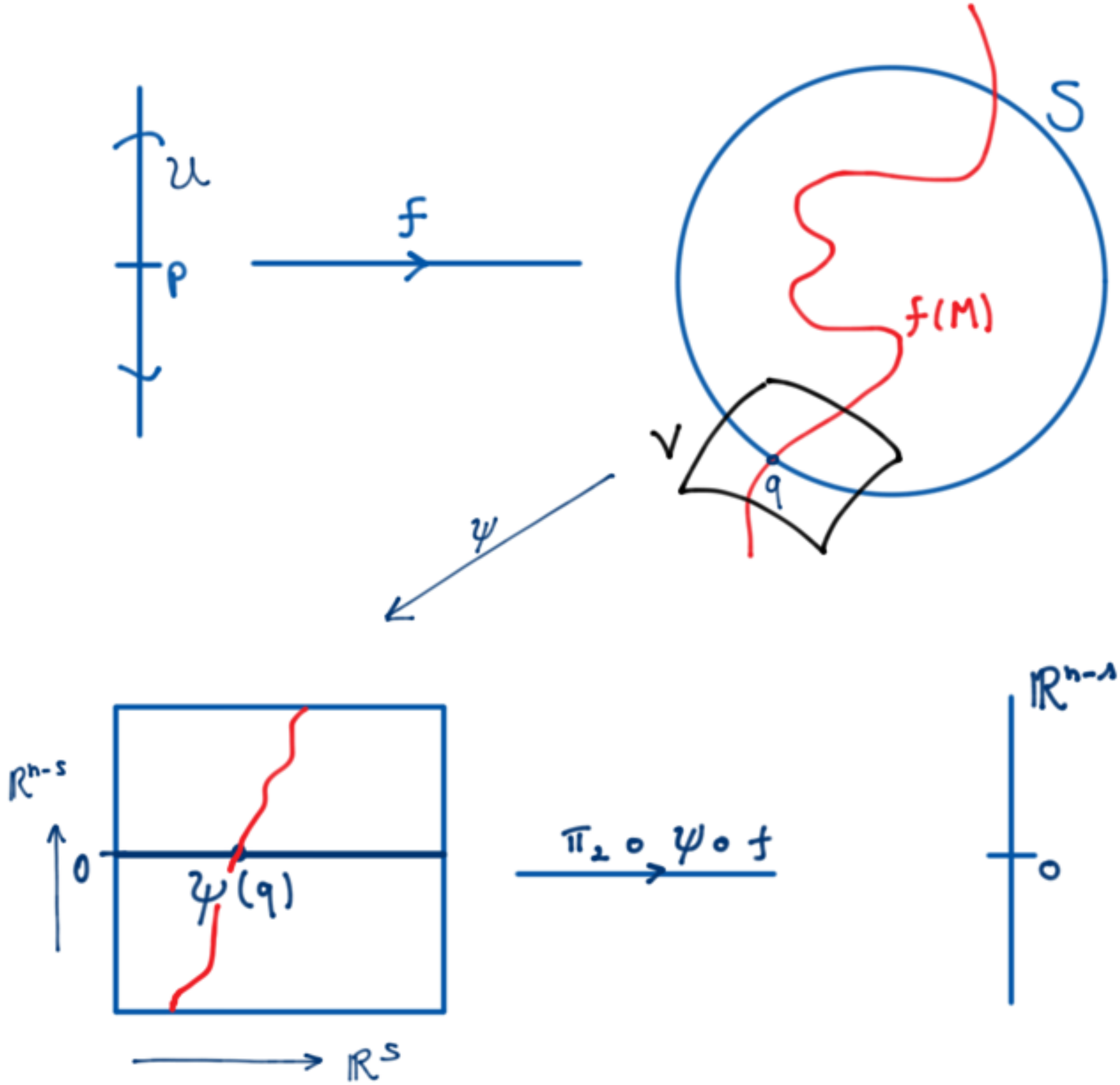
- $y = f(x) \notin S$ ou
- $y = f(x) \in S$ e $\boxed{T_y N = T_y S + Df(x) \cdot (T_x M)}$.

f é dita transversal a S se o for em todos os pontos de M.

Teorema. Sejam $f: M^m \to N^n$ de classe C^r $(r \geq 1)$, $S^s \subset N$ subvariedade C^r de N. Seja $p \in M$ com $q = f(p) \in S$. f é transversal a S em p se e somente se existem:

- uma carta local $\psi: V \to \mathbb{R}^n$, $q \in V$
- vizinhança $\mathcal{U}$ de p em M com $f(\mathcal{U}) \subset V$
- decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ tais que:

$\psi(S \cap V) \subset \mathbb{R}^s \times \{0\}$ e $\pi_2 \circ \psi \circ f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-s}$ seja uma submersão onde $\pi_2: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$ é a segunda projeção.



U
p
f
S
f(M)
V
q
ψ
R^{n-s}
0
ψ(q)
π₂ ∘ ψ ∘ f
R^{n-s}
0
R^s

Teorema. Sejam $f: M \to N$ de classe C^r $(r \geq 1)$ e S^s uma subvariedade de N de classe C^r.

Se f é transversal a S e $f^{-1}(S) \neq \phi$ então $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade C^r de M e com $\operatorname{codim} f^{-1}(S) = \operatorname{codim} S$.

def. Quando $S, M \subset N$ são subvariedades de N dizemos que S é transversal a M em $x \in S$ se

$$T_x N = T_x S + T_x M, \ \forall \ x \in S \cap M.$$

Partições da Unidade e Métricas Riemannianas

definição: Dada uma cobertura aberta enumerável $(\mathcal{U}_n)$ de M, dizemos de ela é localmente finita se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança de x que intercepta apenas um nº finito de $\mathcal{U}_n$'s.

definição: Uma partição da unidade subordinada à cobertura $(\mathcal{U}_n)_n$ é uma coleção de funções (φ_n) não negativas tais que:

(1) $\operatorname{supp}(\varphi_n) = \overline{\varphi_n^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})} \subset \mathcal{U}_n$.

(2) $\sum_n \varphi_n(p) = 1, \ \forall \ p \in M$.

Teorema. Toda cobertura enumerável e localmente finita por abertos de uma variedade admite uma partição da unidade subordinada a ela.

definição. Uma métrica Riemanniana numa variedade M é uma aplicação que a cada $p \in M$ associa um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ definido em T_pM:

$$M \ni p \longmapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p \text{ em } T_pM$$

A métrica é dita C^r se p/ cada $p \in M$ existe um sistema de coordenadas $\varphi = (x_1, \dots, x_m) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $p \in \mathcal{U}$, tal que

$$g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle \text{ é } C^r, \ \forall \ i,j = 1, \dots, m.$$

- Toda variedade possui uma métrica Riemanniana C^∞.

1. Tome $(\mathcal{U}_n)$ cob. p/ abertos loc. finita
2. (φ_n) part. da unidade subordinada a $(\mathcal{U}_n)$
3. Fixe $\varphi = (x_1, \dots, x_n) : \mathcal{U}_n \to \mathbb{R}^m$ e defina $\langle , \rangle_n (q)$, $q \in \mathcal{U}_n$ por:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_n := \delta_{ij}.$$

4. A métrica em M fica definida por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \sum_n \varphi_n(p) \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_n (p).$$

Folheações.

definição. M variedade de dimensão m e classe C^∞. Uma folheação de classe C^r e dimensão n de M é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r em M com as seguintes propriedades:

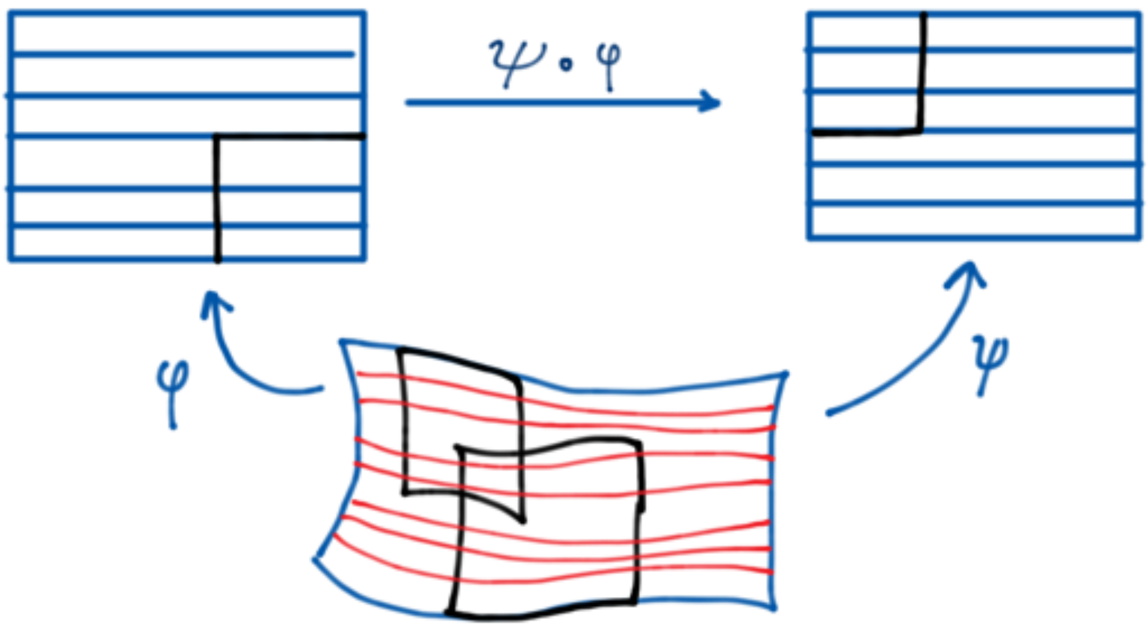
a) Se $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$,

onde $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ são discos abertos,

b) Se $(\mathcal{U}, \varphi)$ e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap V) \longrightarrow \psi(\mathcal{U} \cap V)$ tem a seguinte forma:

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x,y) = (h_1(x,y)\,;\, h_2(y)).$$

Dizemos tb que M é folheada por $\mathcal{F}$.



• Sempre consideraremos folheações C^r $(r \geq 1)$.

Nomenclatura. As cartas $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F}$ são tb chamadas cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$.

definição (Placas) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r e dimensão n, $0<n<m$ de uma variedade M^m. Seja $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{F}$ com

$$\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

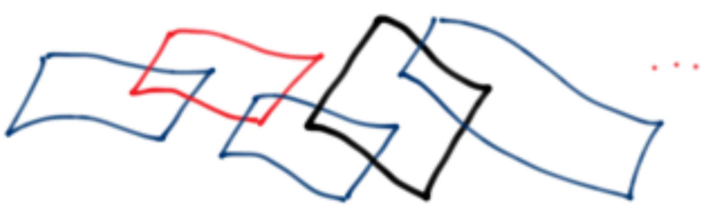
Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_1 \times \{c\})$, $c \in \mathcal{U}_2$ são chamados placas de $\mathcal{F}$ (ou placas de $\mathcal{U}$).

Obs. $f = \varphi^{-1}|_{\mathcal{U}_1 \times \{c\}} : \mathcal{U}_1 \times \{c\} \to \mathcal{U}$ é mergulho C^r, portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe C^r.

Se α e β são placas de $\mathcal{U}$ então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

definição (Caminho de placas)

Um caminho de placas de $\mathcal{F}$ é uma seq. $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, $\forall\, j \in \{1, \dots, k-1\}$.



definição (Folhas) Defina em M a seguinte relação de equivalência: $p \sim q \iff$ existe um caminho de placas de $\mathcal{F}$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ tal que } p \in \alpha_1, \; q \in \alpha_k.$$

É imediato da definição que cada folha de $\mathcal{F}$ é um conjunto conexo por caminhos.

Exemplos de Folheações

Exemplo 1. Folheações definidas por submersões

Seja $f: M \to N$ uma submersão C^r. Pela forma local das submersões, p/ cada $p \in M$, existem cartas locais $(\mathcal{U}, \varphi)$ em M e (V, ψ) em N tais que: $p \in \mathcal{U}$, $q = f(p) \in N$ e

$$\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \psi(V) = V_2 \supset \mathcal{U}_2 \quad \text{com}$$

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathcal{U}_2$$

$$(x, y) \longmapsto y.$$

Portanto as cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ definem uma estrutura de variedade folheada em M onde as folhas são comp. conexas de $f^{-1}(c)$, $c \in N$.

Exemplo 2 (Fibrações)

Um espaço fibrado é uma quadrupla (E, π, B, F) onde E, B, F são variedades, $\pi : E \to B$ é uma submersão, tais que para todo $b \in B$ existem uma vizinhança aberta $\mathcal{U}_b$ de b e um difeo

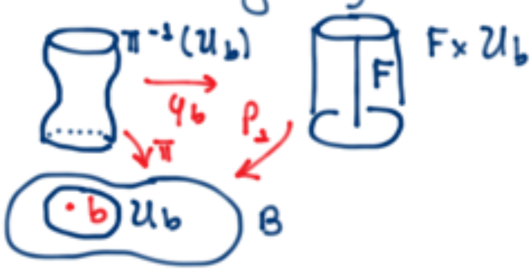
$$\varphi_b : \pi^{-1}(\mathcal{U}_b) \longrightarrow \mathcal{U}_b \times F$$

que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}_b) \arrow[rr, "\varphi_b"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{U}_b \times F \arrow[dl, "P_1"] \\ & \mathcal{U}_b & \end{tikzcd}$$

No diagrama, P_1 é a projeção na 1º coordenada. Os conjuntos $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$ são chamados fibras.

• As fibras de um espaço fibrado (E, B, π, F) formam uma folheação de E cujas folhas são difeomorfas às componentes conexas de F.



Teorema da Vizinhança Tubular: Seja $N \subset M$ uma subvariedade C^r com $r \geq 1$. Existem uma vizinhança aberta $T(N) \supset N$ e uma submersão C^r, $\pi : T(N) \to N$ tais que $\pi(q) = q$ $\forall$ $q \in N$. Se a codimensão de N é k, então $T(N)$ pode ser obtida de forma que $(T(N), \pi, N, \mathbb{R}^k)$ seja um espaço fibrado.

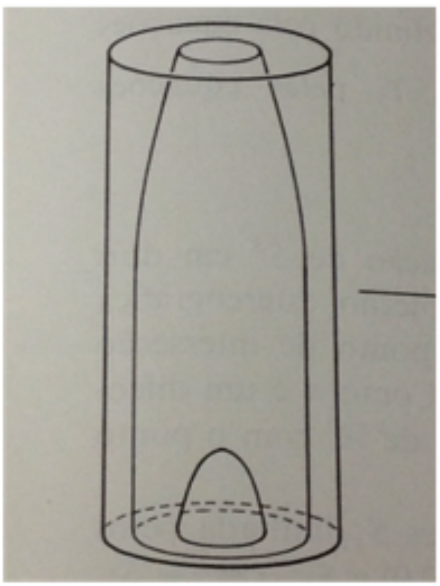
Exemplo: (Folheação de Reeb)

Consideremos a submersão $f: D^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r) \cdot e^{x_3} \quad \text{onde} \quad \alpha(r) = \exp\left(-\exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right)\right).$$

A folheação definida por f tem por folhas os gráficos das funções

$$x_3 = \exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right) + b, \; b \in \mathbb{R}.$$



Desenho retirado do livro do Camacho e Lins Neto.

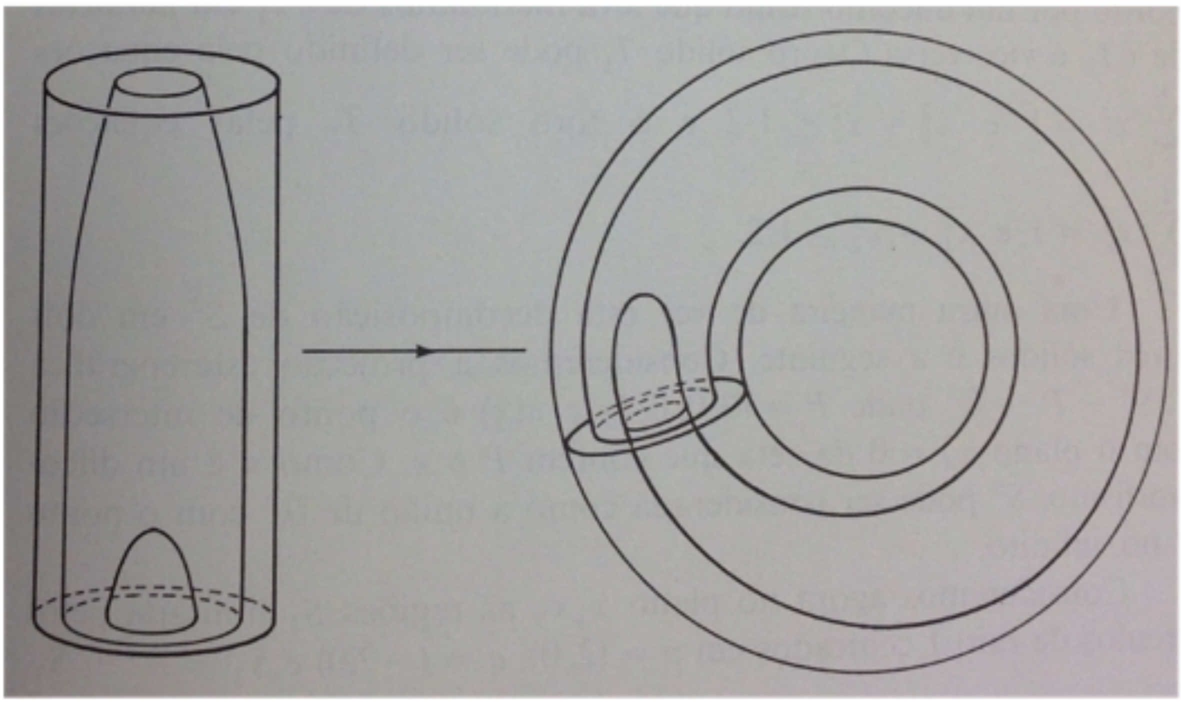
Agora identificamos os pontos do bordo de $D^2 \times [0,1]$ de forma natural:

$$(x_1, x_2, 0) \equiv (y_1, y_2, 1) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2).$$

Com esta identificação temos: $D^2 \times [0,1]/_{\equiv} \simeq D^2 \times S^1$ que é o Toro sólido.

definição: A folheação $\mathcal{R}$ induzida no quociente é chamada de folheação de Reeb.

Observe que $\mathcal{R}$ é C^∞ e tem $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ como uma de suas folhas.



Retirado de Camacho - Lins Neto

Todas as folhas de $\mathcal{R}$ (exceto $S^1 \times S^1$) são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e se acumulam no bordo.

Folheação de Reeb em S^3 : Sejam $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^4$, toros sólidos definidos por:

$$T_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \quad e \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2\}$$

$$T_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \quad e \quad x_1^2 + x_2^2 \geq 1/2\}$$

Então $S^3 = T_1 \cup T_2$. Em T_1 e em T_2 temos as folheações de Reeb $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Assim, a junção de ambas nos dá a folheação de Reeb $\mathcal{R}$ em S^3.

Esta é uma folheação C^∞ de codimensão $\underline{1}$ de S^3 com uma folha compacta (homeomorfa a $\mathbb{T}^2$) e todas as outras homeomorfas a $\mathbb{R}^2$.

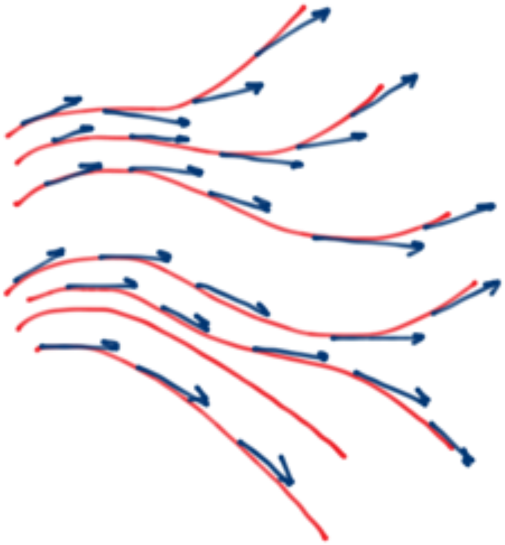
Exemplo 4: Campos de vetores não singulares

Seja M uma variedade. Um campo de vetores em M é uma aplicação que associa a cada $x \in M$ um vetor $X(x) \in T_x M$.

Seja X um campo de vetores em X, podemos associar a X uma EDO:

$$\frac{dx}{dt} = X(x).$$

Uma solução desta EDO é uma curva $\gamma : (a,b) \to M$ tal que:



$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad t \in (a,b)$$

Uma tal curva γ com $\gamma(0) = x$ é dita uma órbita ou curva integral de X por x.

• A existência de tais curvas é garantida pelo Teorema de Existência e unicidade para EDO's.

Quando X não possui singularidades (ou seja $X(x) \neq 0$, $\forall x \in M$) as órbitas de X são folhas de uma folheação de dimensão 1 em M.

* Para construir as cartas locais tome uma transversal local aberta T e considere um difeo. de T em $(0,s)^{m-1}$, digamos $\rho : T \to (0,s)^{m-1}$.

Tome $\mathcal{U} = \varphi(T \times (0,s))$, onde s é pequeno e φ é o fluxo. A carta é dada por: $\varphi(x) = (\rho(T \cap \mathcal{O}(x)); t)$ onde $x = \varphi_t(T \cap \mathcal{O}(x))$.