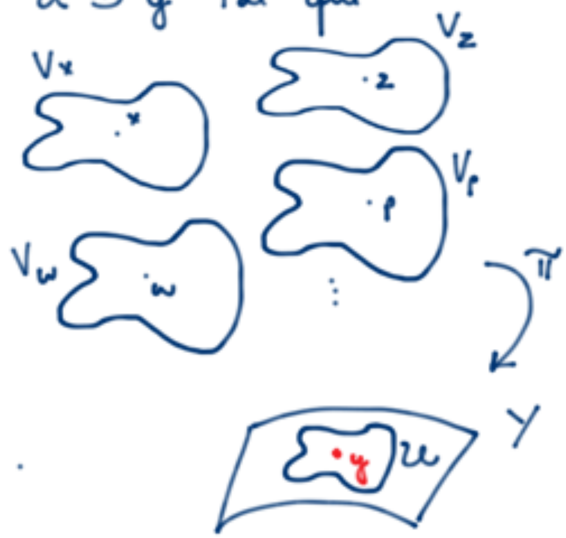
mento se satisfaz:

a) $\forall\, y \in Y$, existe uma vizi. conexa $\mathcal{U} \ni y$ tal que



$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{x \in \pi^{-1}(y)} V_x$$

onde, para cada $x \in \pi^{-1}(y)$, a restrição $\pi/V_x : V_x \to \mathcal{U}$ é homeo.

b) Se $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ e $x_1 \neq x_2$ então $V_{x_1} \cap V_{x_2} = \emptyset$.

Em particular $\pi^{-1}(y)$ é discreto e NÃO possui pto de acumulação.

Nomenclatura: · $\mathcal{U}$: vizinhança distinguida de y

· $\pi^{-1}(y)$: fibra de y.

Aula 2

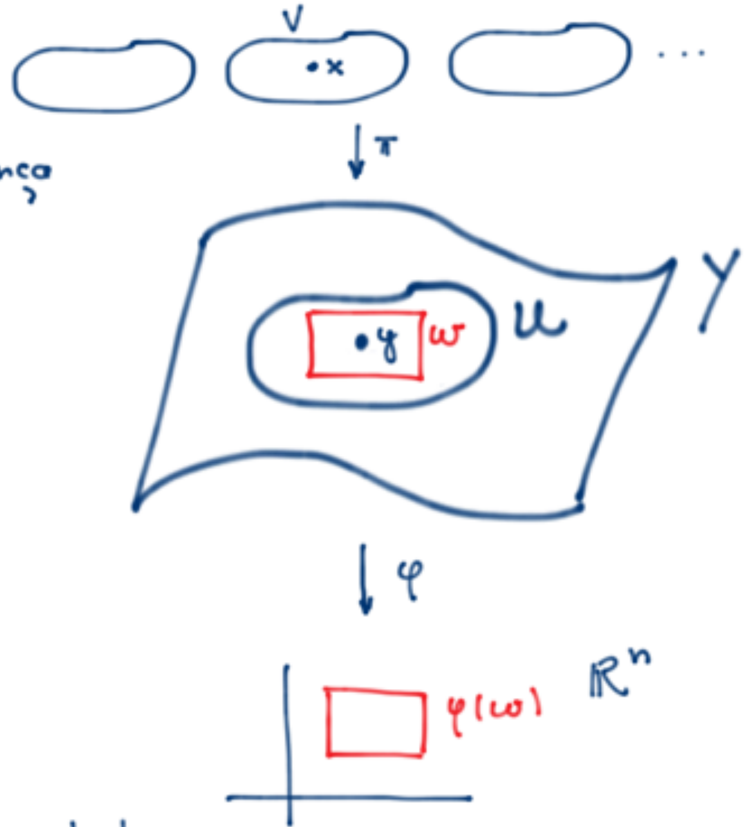
Situações importantes: 1. Suponha que X é recobrimento de uma variedade diferenciável Y.

Podemos induzir em X uma estrutura diferenciável de forma que:

* $\dim X = \dim Y$
* $\pi : X \to Y$ é difeo local C^∞.

Seja $x \in X$, tome $y = \pi(x)$.

Considere $\mathcal{U} \ni y$ vizinhança distinguida de y e $V \ni x$, vizinhança de x tal que: $\pi|V : V \to \mathcal{U}$ é homeo.



· Y é variedade $\therefore$ podemos tomar $W \subset \mathcal{U}$, $y \in W$ e $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ uma carta local.

Tome $V_1 := \pi^{-1}(W) \cap \mathcal{U}$, o qual é aberto de X.

A função $\psi = \varphi \circ (\pi|V_1) : V_1 \to \varphi(W)$ é homeo.

Considere a coleção $\mathcal{A}$ de todas as aplicações ψ construídas desta forma.

Exercício

Sejam (ψ_1, V_1), $(\psi_2, V_2) \in \mathcal{A}$ tais que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ então

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_1 \cap V_2) \to \psi_2(V_1 \cap V_2)$$

é uma aplicação C^∞. Além disso π é difeo local C^∞.

Consequentemente X é uma variedade diferenciável (C^∞) e de dimensão n com esta estrutura.

Nomenclatura: Esta estrutura é chamada de estrutura co-induzida por π.

2. Suponha agora que X é variedade diferenciável. Assuma que temos a seguinte hipótese adicional:

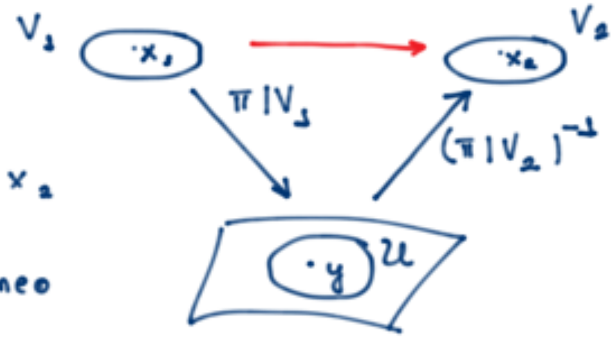
H: Dado $y \in Y$ existe uma vizinhança distinguida $\mathcal{U}$ de y com a seguinte propriedade:

se $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ e

V_1 e V_2 são vizinhanças de x_1 e x_2

tais que $\pi | V_i : V_i \to \mathcal{U}$ é homeo

$i = 1, 2$; então $(\pi|V_2)^{-1} \circ (\pi | V_1) : V_1 \to V_2$ é difeo C^r $(r \geq 1)$.



Com esta hipótese adicional podemos construir o atlas de Y da seguinte forma:

Dado $y \in Y$, fixe uma vizi. distinguida $\mathcal{U}$ de y como na hipótese H

Seja $x \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$, tome V vizinhança de x tal que $\pi | V : V \to \mathcal{U}$ é homeo.

Como X é variedade, podemos tomar $\omega \subset V$ e uma carta local

$$\varphi : \omega \to \mathbb{R}^n, \ x \in \omega.$$

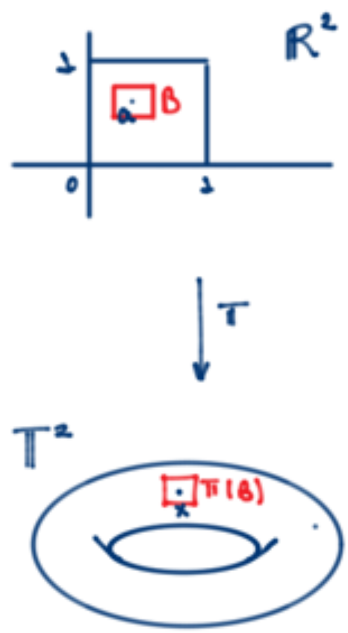
Seja $\psi = \varphi \circ (\pi | \omega)^{-1} : \pi(\omega) \to \varphi(\omega) \subset \mathbb{R}^n$; ψ é homeomorfismo.

Considere $\mathcal{A}$ a coleção de todas as cartas $(\pi(\omega), \psi)$ de Y construídas da forma acima.

Exercício. Mostre que $\mathcal{A}$ é um atlas C^r $(r \geq 1)$.

Exemplo. Considere $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ onde $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x-x', y-y') \in \mathbb{Z}^2$.

Considere $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ a projeção natural.



- π é uma aplicação de recobrimento:

Seja $x \in \mathbb{T}^2$ qualquer, podemos tomar $a \in [0,1]^2$ tal que $\pi(a) = x$.

Considere $B \subset [0,1]^2$ um pequeno retângulo tal que $a \in B$. Tome $\mathcal{U} := \pi(a)$.

Agora observe que: $\pi^{-1}(x) = a + \mathbb{Z}^2$ e se $a+u, a+v \in \pi^{-1}(x)$ então $V_u := B + u$, $V_v := B + v$ são tais que $V_u \cap V_v = \emptyset$ se $u \neq v$ e além disso $\pi| V_u : V_u \to \mathcal{U}$ é homeo (o mesmo para v).

Portanto π é aplicação de recobrimento.

- π satisfaz H: Da construção anterior temos

$$(\pi|V_v)^{-1} \circ (\pi|V_u)(y) = y + v - u$$

que é C^∞. Logo, temos em $\mathbb{T}^2$ uma estrutura diferenciável C^∞.

Derivada de Aplicações Diferenciáveis

- Fixado $x \in M$, considere

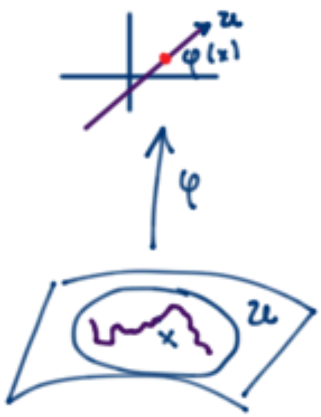
$$C_x(M) = \{ \alpha \text{ curva } C^\infty : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M,\ \varepsilon > 0 \text{ e } \alpha(0) = x \}.$$

Seja $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $x \in \mathcal{U}$, uma carta local. As curvas

$$\alpha_u(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + t.u),\ u \in \mathbb{R}^m$$

estão em $C_x(M)$

Portanto $C_x(M) \neq \emptyset$.



Espaço Tangente: Considere em $C_x(M)$ a relação de equivalência $\sim$ dada por:

$\alpha \sim \beta$ se para alguma carta local $(\mathcal{U}, \varphi)$, $x \in \mathcal{U}$

temos $$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t)\Big|_{t=0}.$$

Exercício. Verifique que a relação $\sim$ independe da carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ escolhida.

Denotamos $\boxed{T_x M := C_x(M)/_{\sim} = \text{espaço tangente a } M \text{ em } x.}$

Estrutura de $T_x M$: $T_x M$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial.

Denote $[\alpha]$ = classe de equiv. de α em $C_x(M)$. Sejam $u = [\alpha]$, $v = [\beta]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos:

a) $u + v = [\varphi^{-1}(\varphi \circ \alpha + \varphi \circ \beta)]$

b) $\lambda . u = [\varphi^{-1}(\lambda . \varphi \circ \alpha)]$,

onde $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ é uma carta local com $\varphi(x) = 0$.

Base de $T_x M$: Se $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ é uma carta local com $x \in \mathcal{U}$, $\varphi(x) = 0$ então

$$\{ [\varphi^{-1}(t.e_1)] ; \dots ; [\varphi^{-1}(t.e_m)] \}$$

é uma base de $T_x M$, onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$.

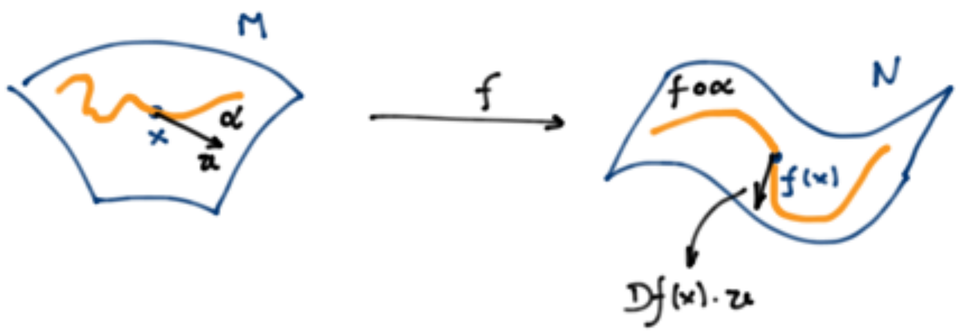
Portanto $T_x M$ é um espaço vetorial de dimensão m.

Notação: $[\varphi^{-1}(t.e_i)] = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Derivada: Seja $f: M \to N$ uma aplicação diferenciável, f induz em cada ponto $x \in M$ a aplicação linear

$$Df(x): T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$$

dada por: seja $u = [\alpha] \in T_x M$ definimos $Df(x).u = [f \circ \alpha]$.



A aplicação $Df(x)$ é chamada de derivada de f no ponto x.

Imersões & Submersões

definição: Dada uma aplicação C^r $(r \geq 1)$, $f: M \to N$, dizemos que f é uma imersão se, para todo $x \in M$,

$$Df(x): T_x M \to T_{f(x)} N$$

é injetiva.

Dizemos que f é uma submersão se para todo $x \in M$, $Df(x)$ for sobrejetiva.

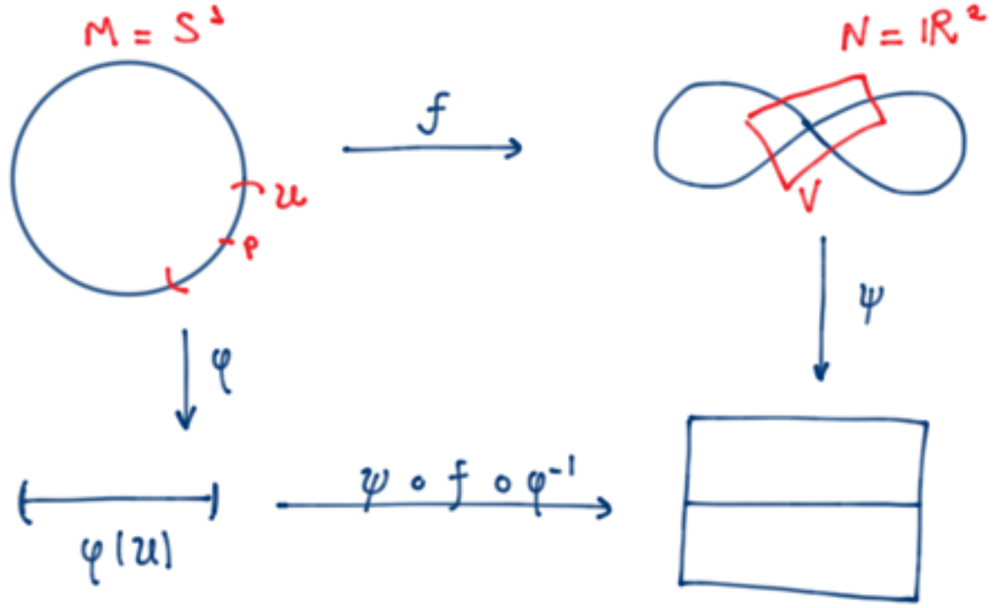
Uma imersão $f: M \to N$ é chamada mergulho se $f: M \to f(M) \subset N$ é um homeomorfismo (onde $f(M)$ está com a top. induzida de N).

Teorema (Forma Local das Imersões)

Seja $f: M^m \longrightarrow N^n$ de classe C^r $(r \geq 1)$. Suponhamos que

$$Df(p): T_pM \longrightarrow T_qN, \quad q = f(p)$$

é injetiva.



Então existem cartas locais $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $p \in \mathcal{U}$, e $\psi: V \to \mathbb{R}^n$, $q \in V$ e uma decomposição $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $f(\mathcal{U}) \subset V$ e a expressão de f nas cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ e (V, ψ) é:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0), \quad x \in \varphi(\mathcal{U}).$$

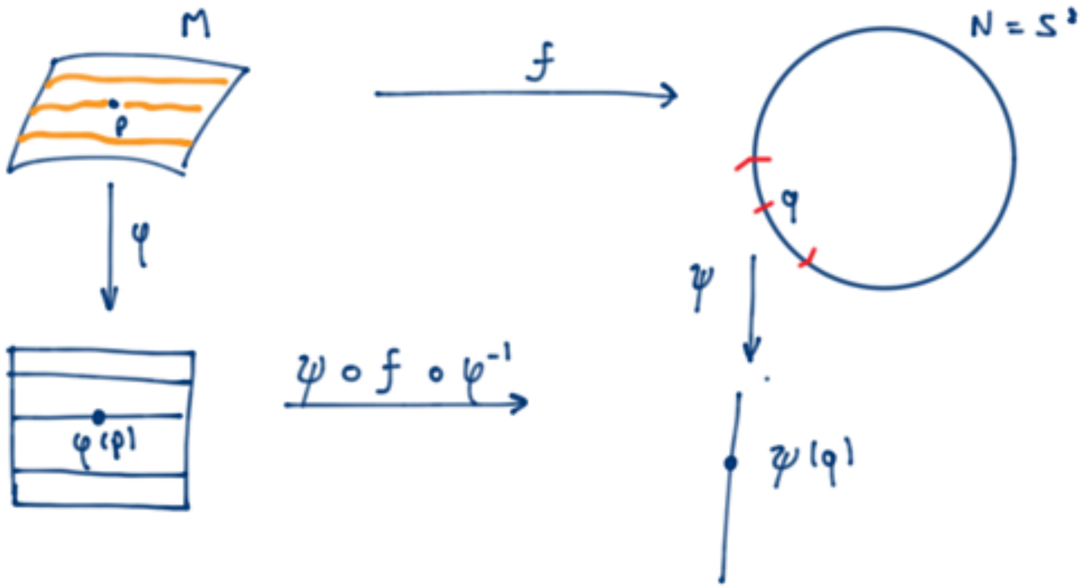
Em outras palavras f é localmente equivalente à imersão linear $x \longmapsto (x, 0)$.

Teorema (Forma local das submersões)

Seja $f : M^m \to N^n$ de classe C^r $(r \geq 1)$. Suponhamos que

$$Df(p) : T_pM \to T_qN, \quad q = f(p)$$

é sobrejetiva.



Então existem cartas locais $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$, $p \in \mathcal{U}$, e $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, $q \in V$, e uma decomposição $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, tais que $f(\mathcal{U}) \subset V$ e a expressão de f nas cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ e (V, ψ) é

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x.$$

Em outras palavras localmente f é equivalente à projeção

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longrightarrow x. \end{aligned}$$

– Subvariedades

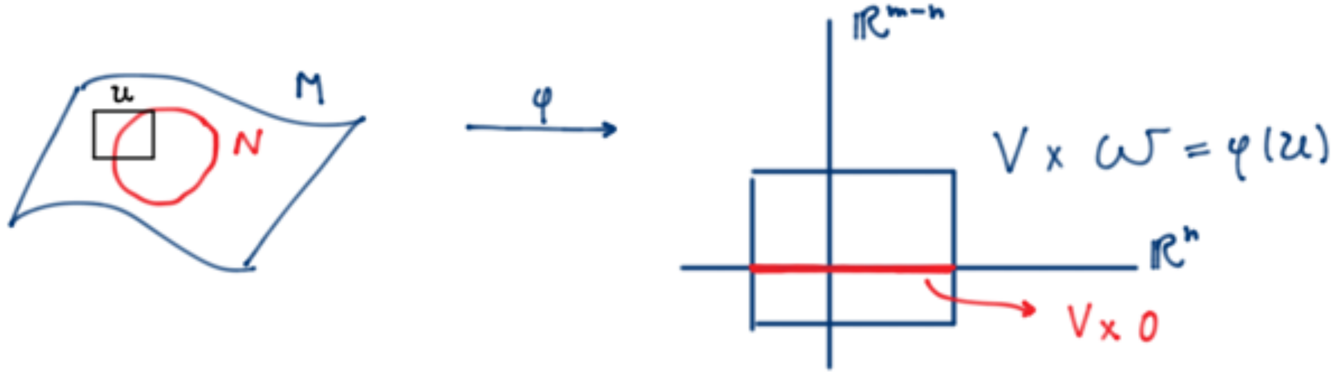
• $N \subset M^m$ é dito uma subvariedade de M de dimensão n e classe C^r $(r \geq 1)$ se: para todo $p \in N$ existe uma carta local C^r, $(\mathcal{U}, \varphi)$ com

$$\varphi(\mathcal{U}) = V \times \mathcal{W}, \text{ onde } 0 \in V \subset \mathbb{R}^n, \ 0 \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{m-n}$$

e V e $\mathcal{W}$ são bolas abertas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$; tais que

$$\varphi(N \cap \mathcal{U}) = V \times 0 .$$

nomenclatura: codimensão de N = $\dim(M) - \dim(N) = m - n$.



Em particular toda subvariedade é uma variedade. Uma consequência do Teo. da Forma Local das Imersões é:

Teorema: Seja $f: M \to N$ de classe C^r $(r \geq 1)$ tal que $Df(p)$ é injetiva. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p tal que $f(\mathcal{U})$ é subvariedade de N de dimensão $\dim(M)$ e classe C^r.

Corolário: Se $f: M \to N$ é mergulho C^r então $f(M)$ é subvariedade C^r de N de dimensão $\dim(M)$.

· Quando $f: M \to N$ é imersão dizemos que $f(M)$ é subvariedade imersa em N.

— Valores regulares

· $f: M \to N$, C^r $(r \geq 1)$

definição:

i) $p \in M$ é regular se $Df(p): T_pM \longrightarrow T_qN$, $q = f(p)$ é sobrejetiva.

ii) $q \in N$ é regular se $f^{-1}(q) = \emptyset$ ou todo $p \in f^{-1}(q)$ é regular.

iii) $q \in N$ é crítico se não for regular.

Teo. Seja $f: M \to N$ de classe C^r $(r \geq 1)$. Se $q \in N$ é valor regular de f e $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ então $f^{-1}(q)$ é uma subvariedade de M de classe C^r e codimensão igual a $\dim(M)$.

Exemplo: $S^n = f^{-1}(1)$ onde $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$.