Lema 3. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um definida em uma variedade compacta M. Então:

a) Existe uma curva $\gamma : S^1 \to M$ transversal a $\mathcal{F}$.

b) Se $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável e $\tilde{\gamma} : S^1 \to M$ é transversal a $\mathcal{F}$ com $\tilde{\gamma}(S^1) \cap F_0 \neq \emptyset$, onde F_0 é uma folha compacta de $\mathcal{F}$, então existe $\gamma : S^1 \to M$ transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\gamma(S^1) \cap F_0$ contém apenas um pto.

[Ex: Entregar].

Lema 4. Seja $\mathcal{F}$ uma folh. transversalmente orientável de codimensão um da variedade compacta, conexa M. Seja $\gamma : S^1 \to M$ uma curva fechada transversal a $\mathcal{F}$ tq toda folha em $\mathcal{F}(\gamma(S^1))$ é compacta e tem grupo fundamental finito. Então $\mathcal{F}(\gamma(S^1)) = M$. Além disso o nº de ptos de interseção das folhas de $\mathcal{F}$ com $\gamma(S^1)$ é constante.

prova.

– W é aberto.

Dado $x \in W$, $F_x \cap \gamma(S^1) \neq \emptyset$. Se $y \in F_x \cap \gamma(S^1)$, consideremos uma curva simples $\mu : [0,1] \to F_x$ tal que $\mu(0) = x$ e $\mu(1) = y$.

Pelo lema de trivialização global é fácil concluir que $\exists$ vizi. A de $\mu([0,1])$

tal que $\forall\, z \in A$, $F_z \cap \gamma(S^1) \neq \emptyset$, como queríamos.

- ω é fechado

Dado $x \in \gamma(S^1)$, pelo lema 1 existem uma vizi. $V(F_x)$ de F_x, saturada por $\mathcal{F}$ e um difeo $h : (-1,1) \times F_x \to V(F_x)$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ em $V(F_x)$ são os conjuntos da forma $h(\{t\} \times F_x)$, $t \in (-1,1)$.

Denote $V_x = h([-1/2, 1/2] \times F_x)$. É claro que $V_x \cap \gamma(S^1)$ contém um intervalo aberto q contém x, I_x.

Temos então $\bigcup_x I_x = \gamma(S^1)$ $\therefore$ $\exists\, x_1, \dots, x_\ell$ tq $\bigcup_{i=1}^{\ell} I_{x_i} = \gamma(S^1)$.

Assim $\omega = \mathcal{F}(\gamma(S^1)) = \bigcup_{i=1}^{\ell} V_{x_i}$ onde $V_{x_i} = \mathcal{F}(I_{x_i})$ é compacto.

Portanto ω é compacto $\therefore$ fechado.

Assim, pela conexidade de M temos $\omega = M$.

- $\# F_x \cap \gamma(S^1)$ cte

Tome $k(x) = \#(F_x \cap \gamma(S^1))$, $x \in \gamma(S^1)$. Considere o conjunto

$$\gamma_j = \{x \in \gamma(S^1) \mid \#(\gamma(S^1) \cap F_x) = j\}.$$

Dado $x \in \gamma_j$, seja $V(F_x)$ uma vizi. como no lema 1. Então $\gamma(S^1) \cap V(F_x)$ possui um nº finito de componentes $\ell_1, \dots, \ell_r$. Para todo $i = 1, 2, \dots, r$ os extremos de ℓ_i estão contidos em $\partial V(F_x)$, logo pelo coro. do Lema 1,

$\#(\ell_i \cap F) = 1$, $\forall$ $F \subset V(F_x)$.

Em particular, $\#(\ell_i \cap F_x) = 1$, $i = 1, \dots, r$, logo $r = 1$. Além disso, para toda folha $F \subset V(F_x)$, $\#(\ell(S^1) \cap F) = j$, logo γ_j é aberto em $\gamma(S^1)$.

Portanto $\gamma(S^1) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \gamma_j \Rightarrow \gamma(S^1) = \gamma_k$ p/ algum $k \in \mathbb{N}$ já que $\gamma(S^1)$ é conexo ∎

- O Teorema de estabilidade completa.

Teorema. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de codim 1 e classe C^1 de uma variedade compacta conexa M e F uma folha compacta de $\mathcal{F}$ com grupo fundamental finito. Então todas as folhas são compactas com grupo fundamental finito.

prova. Pelo Teorema anterior podemos supor que $\mathcal{F}$ não é transversalmente orientável. Seja P um campo de linhas transversal ao campo de planos de codim 1 tangente às folhas de $\mathcal{F}$.

Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ o recobrimento duplo orientável de P. Como P não é orientável, $\tilde{M}$ é conexa. Consideremos em $\tilde{M}$ a folheação $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$. Como π leva folhas de $\mathcal{F}^*$ em folhas de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ possui dois tipos de folhas:

1) folhas F^* tais que $\pi | F^* : F^* \to \pi(F^*)$ é um difeo

2) folhas F^* tais que $\pi | F^* : F^* \to \pi(F^*)$ é um recobrimento com duas folhas.

Em qualquer caso, a folha $\pi(F^*)$ é compacta e tem grupo fundamental finito ■

Espaços Fibrados e Folheações.

– Espaços Fibrados

definição: Um espaço fibrado consiste de variedades diferenciáveis E, B, F e de uma aplicação diferenciável $\pi : E \to B$ e uma estrutura de produto local: existe uma cobertura $(U_i)_{i\in J}$ de B e difeos $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$, $i \in J$, de forma que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U_i \times F \arrow[dl, "\rho"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

onde ρ é a proj. na 1ª coordenada.

Nomenclatura: E = espaço total, B = base, F = fibra.
π = projeção, $\pi^{-1}(x)$ = fibra.

Usualmente os fibrados são denotados por (E, π, B, F). Onde não houver ambiguidade tb diremos que E é o fibrado.

- (E, π, B, F) é dito C^∞ se tudo que está envolvido na definição é C^∞.
- A partir de agora assumiremos que nossos fibrados são C^∞.

- Grupo estrutural

Dados $i, j \in J$ tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, podemos definir

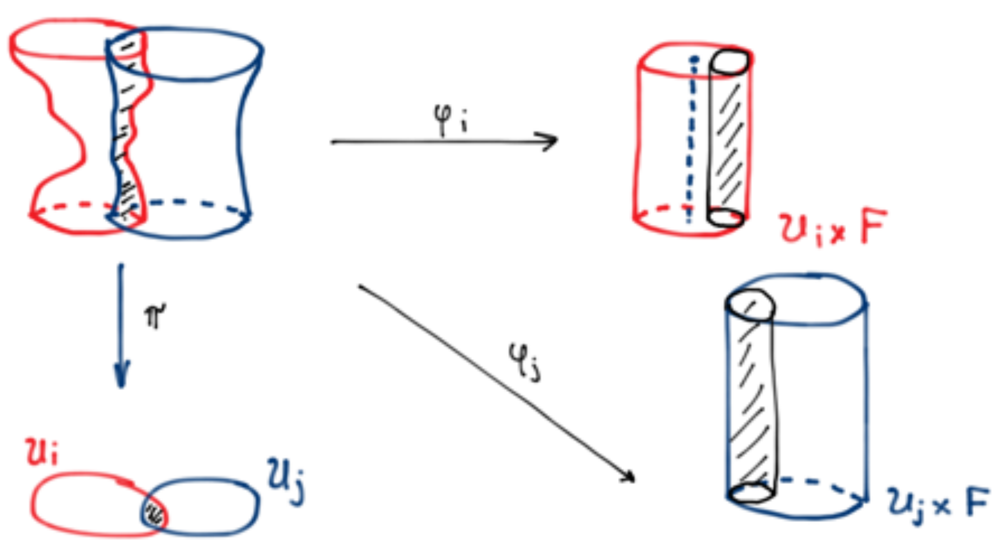
$$h_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{Diff}(F)$$

de tal forma que a aplicação Φ_{ij} a qual faz o diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\
(U_i \cap U_j) \times F \arrow[rr, mapsto, "\Phi_{ij}"] & & (U_i \cap U_j) \times F
\end{tikzcd}$$

$$\Phi_{ij} \circ \varphi_i = \varphi_j,$$

se escreve $\Phi_{ij}(x,y) = (x, h_{ij}(x,y))$.



Para cada $x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, a aplicação $h_{ij}^x : F \longrightarrow F$ definida por

$$h_{ij}^x(y) = h_{ij}(x,y) \quad \text{é um difeo.}$$

Denotemos $g_{ij}(x) = h_{ij}^x$.

definição: Quando F e as fibras são espaços vetoriais e todos os h_{ij}^x são automorfismos lineares de F, dizemos que E é um espaço fibrado vetorial.

definição: Dizemos que o espaço fibrado E tem grupo estrutural discreto se, para quaisquer i e j, a aplicação

$$x \longmapsto h_{ij}^x$$

é localmente constante.

Quando E tem grupo estrutural discreto as folheações de $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ dadas pelas submersões:

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times F \xrightarrow{q} F \quad , \quad q(x,y) = y$$

definem as aplicações distinguidas de uma folheação cujas folhas são transversais às fibras de E. As placas são os conjuntos:

$$(q \circ \varphi_i)^{-1}(y), \; y \in F.$$

Exemplo 1. Fibrado Tangente

Seja M variedade diferenciável, $\dim M = n$, C^∞. Defina

$$TM = \{(p, v_p) : p \in M,\ v_p \in T_pM\}.$$

Se $\pi : TM \to M$ é dada por $\pi(p, v_p) = p$, então $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ é um espaço fibrado vetorial de classe C^∞.

De fato, dada uma carta local $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de M, introduzimos uma carta local

$$\overline{x} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$$

para TM da seguinte forma:

$$\overline{x}(p, X(p)) = \overline{x}\left(p, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = (p, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (p, Dx(p).X(p)).$$

Se $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $y : V \to \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$, dado

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}$$

temos: $\overline{y} \circ \overline{x}^{-1}(p, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (p, \beta_1, \dots, \beta_n)$ onde

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \cdot \alpha_k,$$ o que mostra que β_j's são lineares fixado p.

Assim $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ é um espaço fibrado vetorial.

definição: Uma seção de um espaço fibrado é uma aplicação

$$\sigma : B \to E$$

tal que $\pi \circ \sigma = id$.

Uma seção do espaço fibrado tangente é um campo de vetores em M.

Exemplo 2. Fibrado Normal

Sejam $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica Riemanniana em M^m e $N^n \subset M^m$ uma subvariedade de M. Dado $p \in M$, seja $T_pN^\perp \subset T_pM$ o subespaço de vetores normais a T_pN, definimos:

$$\nu(N) = \{ (p, v_p) : p \in N, \; v_p \in T_pN^\perp \}$$

e $\quad \pi : \nu(N) \longrightarrow N \;, \; \pi(p, v_p) = p$.

Então $(\nu(N), \pi, N, \mathbb{R}^{m-n})$ é um espaço fibrado vetorial.

[Exercício]