– Lema de Trivialização global.

Considere $\mathcal{F}$ folheação de classe C^r, $r \geq 1$ e codim $\mathcal{F} = n$ de M^m.

Lema. Seja $\gamma : I \to M$ um caminho contínuo, simples, cuja imagem está em uma folha F de $\mathcal{F}$. Existe uma vizinhança $V \supset \gamma(I)$ e um difeo C^r

$$h : D^{m-n} \times D^n \to V$$

tal que $h^* \mathcal{F}$ é a folheação cujas folhas são as superfícies $P^{-1}(y)$ onde $P : D^{m-n} \times D^n \to D^n$ é a projeção $P(x,y) = y$.

demonstração: Seja $(U_i)_{i=0}^{k}$ uma cobertura de $\gamma(I)$ por discos coordenados tais que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cap U_j$ é um disco coordenado de $\mathcal{F}$. Seja $\pi : U = \bigcup_{i=0}^{k} U_i \longrightarrow \omega \subset F$ uma retração (como em um lema anterior).

Como γ não tem auto-interseção podemos supor que, para cada i, U_i intersecta no máximo U_{i-1} e U_{i+1} e $U_0 \cap U_k = \emptyset$.

Sejam $p_0 = \gamma(0)$, $p_1 = \gamma(1)$ e $\Sigma_0 = \pi^{-1}(p_0)$, $\Sigma_1 = \pi^{-1}(p_1)$. Então cada folha de $\mathcal{F}|U$ corta Σ_0 no max uma vez. A aplicação de holonomia

$f_\gamma : D_0 \subset \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$ está bem definida num disco D_0 com $p_0 \in D_0$.

Seja V o saturado de D_0 pelas folhas de $\mathcal{F} | \bigcup_{i=0}^{k} U_i$ e $f: V \to D_0$ a aplicação que a cada $x \in V$ associa a interseção da folha $\mathcal{F}|V$ passando por x com D_0. Como $\mathcal{F}$ é C^r, f também é. Além disso f é submersão [Ex].

Seja $A \subset F$ a folha de $\mathcal{F}|V$ contendo p. Reduzindo A podemos supor que A é homeomorfo a D^{m-n} por um difeo $K_1: D^{m-n} \to A$.

Seja $K_2: D^n \to D_0$ um difeo tal que $K_2(0) = p_0$. Se $\mathcal{F}$ é de classe C^r podemos tomar K_1 e K_2 difeos C^r.

Defina $h: D^{m-n} \times D^n \to V$ pondo $h(x,y) = \pi^{-1}(K_1(x)) \cap f^{-1}(K_2(y))$.

Tal h é um homeo que leva a superfície $P^{-1}(y) = D^{m-n} \times \{y\}$, $y \in D^n$, na folha $f^{-1}(K_2(y))$ de $\mathcal{F}|V$.

Se $\mathcal{F}$ é C^r, h é um difeo C^r com inverso:

$$h^{-1}(p) = (K_1^{-1}(\pi(p)), K_2^{-1}(f(p))) \blacksquare$$

Lema 4. Sejam F uma folha de $\mathcal{F}$ de codimensão 1, transversalmente orientável e $f_0: K \to F$ uma aplicação contínua homotópica a uma cte, K compacto e conexo por caminhos. Existe uma família contínua de aplicações $f_t: K \to M$, $t \in I$, tal que $f_t(K)$ está contido numa folha F_t. Para $x \in K$ fixo, a curva $t \mapsto f_t(x)$ é normal a $\mathcal{F}$.

[Ex. Entregar].

– Teorema de Estabilidade Local.

Teorema. Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^1 e codim n de uma variedade M e F uma folha compacta com grupo de holonomia finito. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de F, saturada por $\mathcal{F}$, na qual todas as folhas são compactas com grupo de holonomia finito.

Além disso, podemos definir uma retração $\pi : \mathcal{U} \to F$ tal que, para toda folha $F' \subset \mathcal{U}$, $\pi | F' : F' \to F$ é um recobrimento com nº finito de folhas e, para todo $y \in F$, $\pi^{-1}(y)$ é homeomorfo a um disco de dimensão p e é transversal a $\mathcal{F}$. A vizinhança $\mathcal{U}$ pode ser tomada arbitrariamente pequena.

demonstração: Como F é compacta, existe uma cobertura $(\mathcal{U}_i)_{i=0}^{k}$ de F por discos coordenados, onde $\overline{\mathcal{U}_i}$ é compacto e (por um lema anterior) podemos definir uma retração

$$\pi : \bigcup_{i=0}^{k} U_i \longrightarrow F \quad \text{de classe } C^1$$

tal que $\forall\, x \in F$, $\pi^{-1}(x)$ é transversal a $\mathcal{F} \mid \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{U}_i$. Coloquemos

$$V = \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{U}_i .$$

• Em cada $\mathcal{U}_j$ consideremos $D_j = \pi^{-1}(x_j)$, onde $x_j \in \mathcal{U}_j \cap F$. Por hipótese existem caminhos fechados $\gamma_j : I \to F$, $\gamma_j(0) = \gamma_j(1) = x_0$, $j = 1, 2, \dots, m$ e aplicações de holonomia correspondentes: $f_j : \omega_j \subset D_0 \to D_0$ tais que

$$\mathrm{Hol}(F, x_0) = \{ f_0 = 1, f_1, \dots, f_m \}.$$

Assim tomando $\omega = \bigcap_{j=1}^{m} \tilde{\omega}_j$ o domínio de todas as aplicações contém ω.

Afirmação: Existe $\omega_0 \subset \omega$, vizinhança de x_0, tal que, se $y \in \omega_0$ então a folha $\tilde{F}_y$ da restrição $\mathcal{F}|V$ que passa por y não corta o bordo ∂V.

-prova: Observemos primeiramente que se $y \in \omega$ então

$$\tilde{F}_y \cap D_0 \subset \{ f_j(y) : j = 0, \dots, m \}.$$

Agora, o lema de Trivialização global mostra que para todo $i = 0, \dots, k$ existe uma vizinhança ω_i de x_0 em D_0 tal que:

- para todo $y \in \omega_i$, $\tilde{F}_y \cap D_i$ contém no máximo $m+1$ ptos.

Coloquemos $\omega_0' = \omega \cap \omega_1 \cap \dots \cap \omega_k \subset D_0$ e, para $y \in \omega_0'$, coloquemos:

$$\tilde{F}_y \cap D_i = \{ q(i,j,y) : 1 \leq j \leq l_i \} \text{ onde } l_i \leq m+1$$

Seja $P(i,j,y)$ a placa de $\mathcal{U}_i$ por $q(i,j,y)$.

Seja d uma distância em M temos $d(\partial V, F) = \delta > 0$. Coloquemos

$$\delta_i(y) = \max_{1 \leq j \leq l_i} d(x_i, P(i,j,y)) \text{ para } y \in \omega_0, \ 1 \leq i \leq k.$$

Para $i=0$ temos:

$$\lim_{y\to x_0} \max_{1\le j\le l_0} d(x_0, q(0,j,y)) \le \lim_{y\to x_0} \max_{0\le j\le m+1} d(x_0, f_j(y)) = 0.$$

Logo $\lim_{y\to x_0} \delta_0(y)=0$. Analogamente $\lim_{y\to x_0} \delta_i(y)=0$, para $1\le i\le k$.

Assim, existe uma vizinhança $W_0 \subset W_0'$ de x_0 tal que para todo $y\in W_0$ e $i=0,1,\dots,k$,

$$\delta_i(y) \le \delta/2.$$

Temos então que, para todo $y\in W_0$ e $i=0,\dots,k$, as placas de $\widetilde{F}_y \cap U$ não cortam ∂V, logo $\widetilde{F}_y \subset V$.

∘ Além disso $\forall\, y\in W_0$ temos $F_y=\widetilde{F}_y$ é compacta.
De fato, para todo $y\in W_0$, F_y é coberta por um nº finito de placas $P(i,j,y)$, $0\le i\le k$, $1\le j\le l_i\le m+1$. Logo F_y é compacta.

Em particular o saturado $\mathcal{U}=\mathcal{F}(W_0)\subset V$ é uma vizinhança de F e $\pi=\pi|\mathcal{U}:\mathcal{U}\to F$ é uma retração tal que $\pi|F':F'\to F$ é aplic de recobrimento c/ nº finito de folhas.

Para mostrar que o grupo de holonomia das folhas $F'\subset\mathcal{U}$ é finito, basta observarmos que para todo $j=0,\dots,m$, $f_j: W_0\to W_0$ está definida e, portanto, $\mathrm{Hol}(F')\subset\{f_0,\dots,f_m\}$ já que toda curva fechada em F' é o levantamento de uma curva fechada em F ∎

Corolário. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^1 e codimensão n de uma variedade M e F uma folha compacta com grupo fundamental finito. Então, existe uma vizi. $\mathcal{U}$ de F, saturada por $\mathcal{F}$, na qual todas as folhas são compactas com grupo fundamental finito.

demonstração: Claro que F tem holonomia finita. Pelo Teo de estabilidade local segue que $\exists$ vizi. $\mathcal{U}$ de F, saturada tal que se $F' \subset \mathcal{U}$ é folha de $\mathcal{F}$ então $\pi | F' : F' \to F$ é um recobrimento. Como

$$(\pi | F')_* : \pi_1(F') \longrightarrow \pi_1(F)$$

é injetiva, temos que $\pi_1(F')$ é finito ∎

Teorema de Estabilidade Completa

- Caso 1: $\mathcal{F}$ transversalmente orientável

Setting: $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão 1, transversalmente orientável e classe C^r, $r \geq 1$

M = variedade compacta conexa.

Teorema (da estabilidade completa) Suponhamos que $\mathcal{F}$ possui uma folha compacta F com grupo fundamental finito. Então todas as folhas são difeomorfas a F. Além disso, existe uma submersão C^r, $f : M \to S^1$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ são os conjuntos $f^{-1}(\theta)$, $\theta \in S^1$.

A demonstração é feita em vários passos.

Lema 1. Seja $Hom(\mathbb{R},0)$ o grupo de germes em $0 \in \mathbb{R}$ de homeomorfismos que deixam $0 \in \mathbb{R}$ fixo.
Seja G um sub-grupo finito de $Hom(\mathbb{R},0)$. Então G possui no máximo dois elementos.
Se G possui exatamente dois elementos então um deles inverte a orientação e o outro é a identidade.

prova. Seja $f \in G$. Afirmamos que $f^2 = 1$ (id em $Hom(\mathbb{R},0)$).

Consideremos f um representante de f. Temos então $f:(a,b) \to (c,d)$, $a<0<b$, $c<0<d$ e $f(0)=0$.

1º caso. $f(0,b) \subset (0,+\infty)$.

Neste caso, se $\exists y \in (0,b)$ com $f(y)<y$ então (como f é homeo ela deve ser estritamente crescente ou decrescente; como $f(b)>f(0)$ então é estrit. crescente), $0 < f^k(y) < f^{k-1}(y) < \dots < f(y) < y$.

Neste caso $f^k \neq f^j$, $\forall\, k \neq j$ o que contradiz o fato de G ser finito.

Analogamente não podemos ter $f(y)>y$ $\therefore$ neste caso devemos ter $f = id$.

Além disso $f(a,0) \subset (-\infty,0)$ e, pelo mesmo argumento prova-se que $f(y)=y$

$\forall\, y \in (a,0)$. Ou seja, neste caso temos $f = id$.

<u>2º Caso</u>. $f(0,b) \subset (-\infty,0)$.

Neste caso f é estritamente decrescente e, portanto, $f^2(0,b) \subset (0,+\infty)$.
Assim, $f^2 = id$.

Assim, todo elemento de G tem ordem ≤ 2 e $\therefore$ G é abeliano.

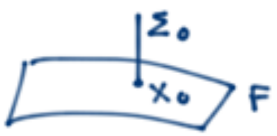
Suponhamos que $\exists\, f,g \in G$ com $f,g \neq 1$. Seja $(a,b) = \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom}\, g$
Como $f,g \neq 1$ temos

$$g(0,b) \subset (a,0) \quad e \quad f(g(0,b)) \subset (0,+\infty).$$

Logo $f \circ g = id \Rightarrow f = g^{-1}$. Como $g^2 = id$ segue que: $f = g^{-1} = g$ concluindo o que queríamos demonstrar ■

<u>Corolário</u>. Seja F uma folha compacta de uma folheação $\mathcal{F}$ de codim 1 tal que $\pi_1(F)$ é finito. Então $Hol(F,x_0)$, $x_0 \in F$, contém no máximo dois elementos. Se $\mathcal{F}$ for transv. orientável então $Hol(F,x_0) = \{1\}$.

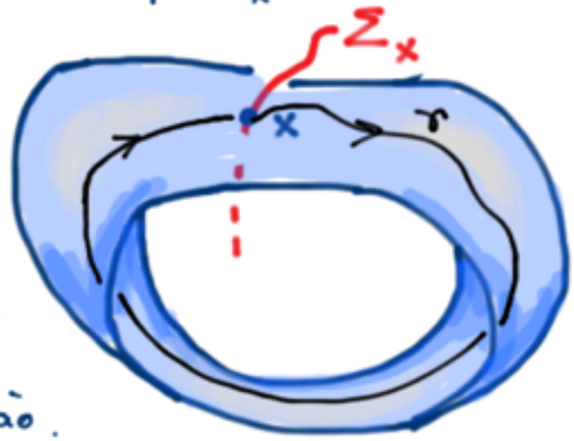
<u>prova</u>. Seja Σ_0 uma seção transv. aberta de $\mathcal{F}$ por x_0,



então $\Sigma_0 \simeq \mathbb{R}$ e $\therefore$ $Hol(F,x_0) \simeq Hol(\mathbb{R},0)$ que, pelo lema anterior tem no max. 2 elementos.

Suponha que $\mathcal{F}$ é transv. orientável. Neste caso existe um campo de vetores X em M que não se anula e é transversal a $\mathcal{F}$.

Dado $x \in F$, tomemos como seção transversal a $\mathcal{F}$ por x um pequeno segmento da órbita de X que passa por x, o qual denotaremos por Σ_x.



Assim, se $f : \Sigma'_{x_0} \subset \Sigma_{x_0} \to \Sigma_{x_0}$ é um elemento de $\mathrm{Hol}(F, x_0)$, temos

$$f(x_0) = x_0 \quad \text{e} \quad f \neq id \Leftrightarrow f \ \text{inverte orientação.}$$

Ou seja, $f = id \Leftrightarrow Df(x_0) . X(x_0) = \lambda_1 X(x_0)$, onde $\lambda_1 > 0$.

Seja $\gamma : [0,1] \to F$ uma curva fechada tal que f é o elem. de $\mathrm{Hol}(F, x_0)$ correspondente a $[\gamma]$. Para cada t existe uma aplicação de holonomia correspondente $f_t : \Sigma'_t \subset \Sigma_0 \to \Sigma_{\gamma(t)}$ e temos:

$$Df_t(x_0) . X(x_0) = \lambda(t) . X(\gamma(t))$$

onde $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que não se anula [devido à transversalidade]. Em particular λ tem sinal constante, o que implica: $Df(x_0) . X(x_0) = \lambda_1 . X(x_0)$ com λ_1 tendo o mesmo sinal que $\lambda(0)$.

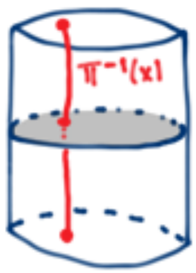
Mas $f_0 = id$ $\therefore$ $\lambda(0) = 1$. Portanto $f = id$ c.q.d ∎

Lema 2. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação C^r $(r \geq 1)$ de codimensão 1. Suponhamos que F seja uma folha compacta de $\mathcal{F}$ tal que $\# \mathrm{Hol}(F, x_0) = 1$.

Então existem uma vizinhança aberta $V(F)$ de F em M, saturada por $\mathcal{F}$, e um difeomorfismo C^r, $h: (-1,1) \times F \longrightarrow V(F)$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ em $V(F)$ são os conjuntos do tipo $h(\{t\} \times F)$, $t \in (-1,1)$, sendo $F = h(\{0\} \times F)$.

Em particular $V(F) - F$ possui duas componentes conexas.

demonstração: Pelo Teorema de estabilidade local existe uma vizinhança $V = V(F)$ de F, saturada por $\mathcal{F}$, e uma retração $\pi: V \longrightarrow F$ tal que, para todo $x \in F$, $\pi^{-1}(x)$ é um segmento transversal a $\mathcal{F}$.



Além disso, se $F' \subset V$ é uma folha de $\mathcal{F}$ então

$$1 \leq \# (F' \cap \pi^{-1}(x)) \leq \# \mathrm{Hol}(F, x_0) = 1. \text{ Logo}$$

$$\# F' \cap \pi^{-1}(x) = 1 .$$

Consideremos uma parametrização C^r, $\sigma: (-1,1) \longrightarrow \pi^{-1}(x_0)$, tal que $\sigma(0) = x_0$, $\sigma'(t) \neq 0$ $\forall$ $t \in (-1,1)$.

Denotemos F_t a folha que corta $\pi^{-1}(x_0)$ em $\sigma(t)$. A aplicação $t \longmapsto F_t$ é biunívoca e sobre V. Consideremos agora a aplicação

$g: V \longrightarrow (-1,1) \times F$ definida por $g(y) = (g_1(y), \pi(y))$ onde $g_1(y)$ é definido por $F_{g_1(y)} \ni y$.

Assim temos $g(F_t) = \{t\} \times F$ pois $\pi(F_t) = F$. Além disso g é bijetora pois se $g(y) = g(y')$ então $y, y' \in F_{g_1(y)} = F_{g_1(y')} =: F_t$ e como $\pi|F_t$ é difeo então $\pi(y) = \pi(y') \Rightarrow y = y'$.

Finalmente defina $h: (-1,1) \times F \to V$ a inversa de g. Ou seja $h(t,x)$ é o único ponto de $F_t \cap \pi^{-1}(x)$ ∎

Corolário. Sejam F uma folha de $\mathcal{F}$ tal que $\# \mathrm{Hol}(F, x_0) = 1$ e $V(F)$ uma vizinhança de F como no lema 2. Se ℓ é um segmento transversal a $\mathcal{F}$ tal que $\ell \subset V(F)$ então para toda folha $F' \subset V(F)$ temos $\# \ell \cap F' \leq 1$.

Se as extremidades de ℓ estão em ∂V então $\#(\ell \cap F') = 1$, para toda folha $F' \subset V(F)$.

Demonstração do Teorema: Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que a folha F_x de $\mathcal{F}$ por x é compacta e tem grupo fundamental finito. Por hipótese $\mathcal{U} \neq \emptyset$ e pelo Lema 1, $\mathcal{U}$ é aberto.

Passo 1. $\mathcal{U} = M$
Nosso objetivo é mostrar que $\partial \mathcal{U} = \emptyset$. Neste caso teremos que $\mathcal{U} = M$ pois M é conexa.

· Como $\mathcal{U}$ é saturado, $\partial \mathcal{U}$ tb é saturado. Suponhamos por absurdo que $\partial \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Afirmação. Nenhuma folha $F' \subset \partial\mathcal{U}$ é compacta.

prova. Suponhamos que exista uma folha compacta $F \subset \partial\mathcal{U}$. Por um Lema existem uma vizi. V de F em M e uma retração $\pi : V \to F$ tal que para todo $x \in F$, $\pi^{-1}(x)$ é um segmento transversal a $\mathcal{F}$. Como $F \subset \partial\mathcal{U}$ então existe alguma folha $F' \subset \mathcal{U} \cap V$. Temos então que

$$g = \pi|F' : F' \longrightarrow F$$

é um difeo. local. Como F' é compacta, segue-se que $g : F' \to F$ é um recobrimento c/ nº finito de folhas.

Se s é o nº de folhas do recobrimento então:

$$\#(\pi_1(F)) = s.\ \#(\pi_1(F')).$$

Portanto F tem grupo fundamental finito e então $F \in \mathcal{U}$ o que é um absurdo.

Portanto $F' \subset \partial U \Rightarrow F'$ não compacta ∎

• Seja $p \in \partial\mathcal{U}$ e consideremos um segmento ℓ transversal a $\mathcal{F}$ tal que $p \in \ell$. Como $p \in \partial U$, existe $q \in \ell \cap \mathcal{U}$. Seja $[p,q] \subset \ell$ o segmento fechado c/ extremos p e q.

Então $[p,q] \cap \mathcal{U} = \bigcup_{n \in A} I_n$, onde A é um conjunto enumerável e $\forall n \in A$, I_n é um intervalo aberto em $(p,q]$ e se $m \neq n$ então $I_n \cap I_m \neq \emptyset$.

Seja $x \neq q$ a extremidade de um destes segmentos e consideremos a folha $\bar{F} = F_x$ que passa por x.

Suponhamos, por exemplo, que x é extremidade do intervalo

$I_J = (x,y) \subset [p,q] \cap \mathcal{U}$.

Seja $\tilde{\mathcal{U}}$ a componente conexa de $\mathcal{U}$ que contém (x,y). Pela uniformidade de transversal de $\mathcal{F}$, $\forall\, x' \in \tilde{F}$ e todo segmento Σ, transversal a $\mathcal{F}$ com $x' \in \Sigma$, existe um segmento $(x',y') \subset \Sigma \cap \tilde{\mathcal{U}}$. Além disso se $z \in (x,y)$ está suf. próximo de x então existe $z' \in (x',y')$ próximo de x' tal que $F_z = F_{z'}$.

Como $\tilde{F}$ não é compacta e M é compacta, $\tilde{F}$ se acumula em algum ponto $\tilde{p} \in M - \tilde{F}$. Seja V uma vizinhança trivializadora de $\mathcal{F}$ que contém $\tilde{p}$ e $J \subset V$ um segmento compacto e transversal a $\mathcal{F}$ contendo $\tilde{p}$ no seu interior.

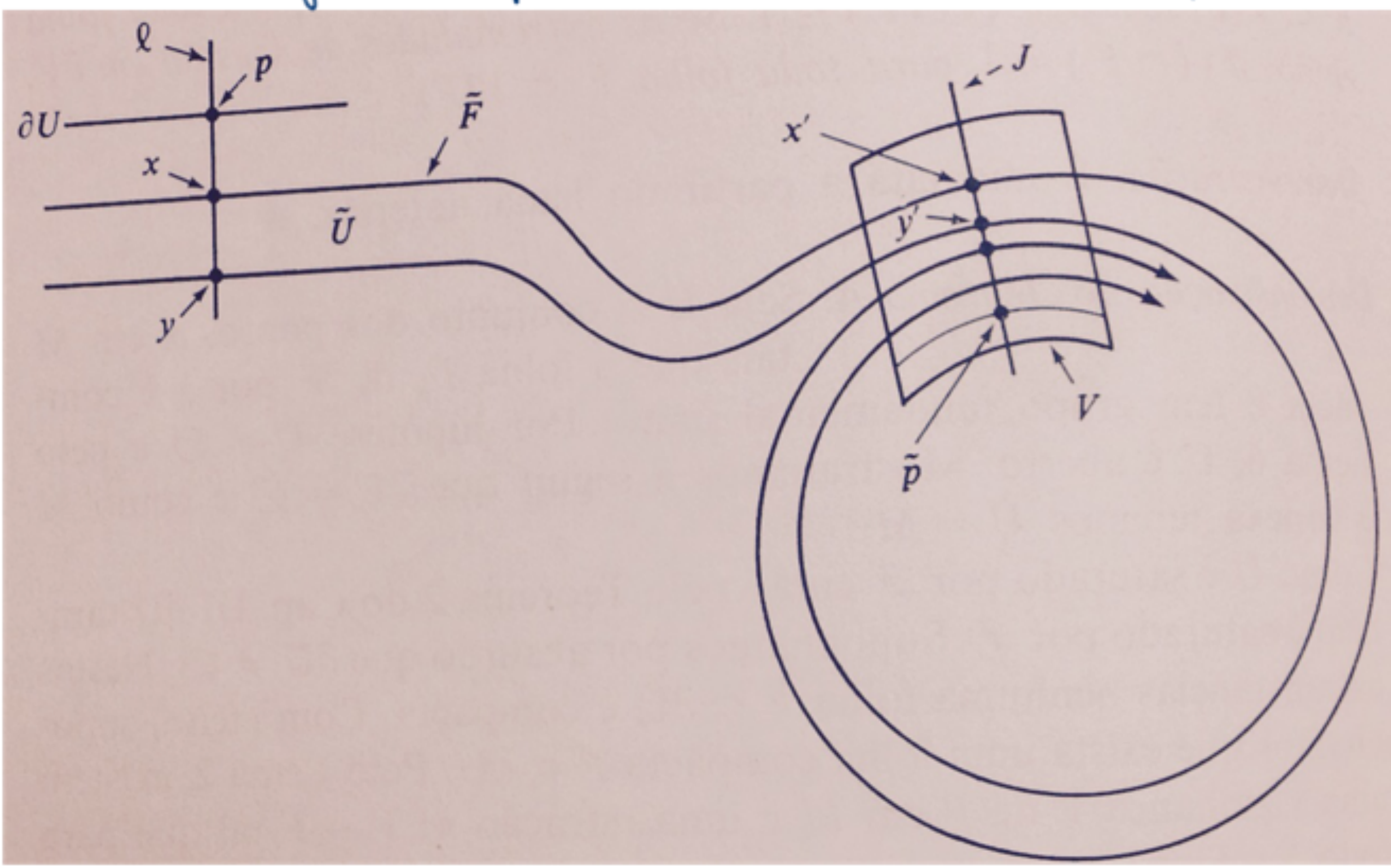


figura retirada de Camacho - Lins Neto.

Como $\tilde{p} \notin \tilde{F}$ é ponto de acumulação de $\tilde{F}$, $\tilde{F}$ corta V numa infinidade de placas que se acumulam na placa que contém $\tilde{p}$. Assim $\tilde{F}$ intersecta J numa infinidade de pontos.

Coloquemos $J \cap \tilde{F} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $J \cap \tilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{r \in B} J_r$ onde $\forall\, r \in B$, J_r é um seg. aberto e $J_r \cap J_s = \emptyset$ se $r \neq s$.

Mas $\forall\, n$, $\exists$ $(x_n, y_n) \subset \tilde{\mathcal{U}} \cap J$, onde $y_n \neq x_n$, logo $\forall\, n \in \mathbb{N}$, x_n é extremo de algum J_r, $r \in B$. Assim B é infinito e podemos supor $B = \mathbb{N}$.

Como o nº de componentes conexas de $J \cap \tilde{\mathcal{U}}$ é infinito e no max. duas delas podem ter algum extremo em $\tilde{\mathcal{U}}$, podemos supor que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ os extremos de J_n estão contidos em $\partial \tilde{\mathcal{U}}$ retirando do conjunto $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ as componentes que não satisfazem tal propriedade.

Afirmação. Se $F' \subset \tilde{\mathcal{U}}$ então F' corta J_n.

Basta mostrar que $\mathcal{F}(J_n) = \tilde{\mathcal{U}}$. O cjto $\mathcal{F}(J_n)$ é aberto contido em $\tilde{\mathcal{U}}$. Vamos mostrar que ele é tb fechado.

Seja $\{p_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{F}(J_n)$ tal que $\lim_{j \to \infty} p_j = p' \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Como $F_{p'} \subset \tilde{\mathcal{U}}$, pelo lema 2 existe uma vizinhança $V(F_{p'}) \subset \tilde{\mathcal{U}}$, saturada por $\mathcal{F}$ e tal que $\mathcal{F}|V(F_{p'})$ é equiv. à folheação produto de $(-s,s) \times F_{p'}$. O segmento J_n corta pelo menos uma folha em $V(F_{p'})$, já que $p_j \in V(F_{p'})$ para j grande.

Além disso os extremos de $J_n \cap V(F_{p'})$ estão contidos em $\partial V(F_{p'})$; logo J_n corta todas as folhas de $V(F_{p'})$ e $\therefore$ $p' \in \mathcal{F}(J_n)$ como queríamos.
Como $\tilde{\mathcal{U}}$ é conexo segue que $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{F}(J_n)$.

Assim toda folha $F' \subset \tilde{\mathcal{U}}$ corta J numa infinidade de pts, o que é impossível já que J e F' são compactos e J é transversal a $\mathcal{F}$.

Portanto $\partial \mathcal{U} = \emptyset$, ou seja $\mathcal{U} = M$.

Passo 2. Todas as folhas de $\mathcal{F}$ são difeomorfas.

prova. Tome $\mathcal{U}_F = \{x \in M \mid F_x$ é difeomorfa a $F\}$, $F \in \mathcal{F}$.
Pelo lema 2 $\mathcal{U}_F$ é aberto em M. Pela mesma razão $M - \mathcal{U}_F$ é aberto.
Como M é conexa, $\mathcal{U}_F = M$ ∎

Passo 3. Existe submersão $f: M \to S^1$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ são as superfícies $f^{-1}(\theta)$, $\theta \in S^1$.

Prova. Suponha que existe uma curva fechada $\gamma: S^1 \to M$ transversal a $\mathcal{F}$ e tal que $\gamma(S^1)$ corta cada folha de $\mathcal{F}$ em exatamente um ponto.
Neste caso podemos tomar $f(p) := \gamma^{-1}(F_p \cap \gamma(S^1))$.

A existência de γ segue dos dois lemas a seguir.