Introdução à Teoria de Folheações.

Introdução

- Decomposição de uma variedade em subvariedades conexas disjuntas como um livro:

Pergunta inicial : Hopf 1930. Existe em S^3 um campo de vetores X completamente integrável, isto é,

$$X \cdot \nabla . X \neq 0 \;?$$

$\nabla . X$ aqui denota o rotacional de X:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Teorema de Reeb : Sim! Existe uma folheação C^∞ satisfazendo o desejado.

A. Haefliger (Tese 1958) Provou que não existem folheações analíticas de S^3 de dim 2.

Estes resultados motivaram a seguinte questão: "Será que toda folheação de dimensão dois de S^3 possui uma folha compacta?".

S. P. Novikov 1965: Sim!

Revisão de Variedades Diferenciáveis

Derivadas & Derivadas Parciais.

definição: Uma aplicação $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x \in \mathcal{U}$ se existe uma transformação linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz:

$$f(x+v) = f(x) + T.v + R(v) \quad \text{com} \quad \lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{\|v\|} = 0 ,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$ suficientemente pequeno.

Notação. $T = Df(x)$.

Seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ base canônica de $\mathbb{R}^m$. Definimos:

$$\text{i-ésima derivada parcial de } f \text{ em } x = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := Df(x) \cdot e_i}$$

- $f \in C^r$ quando cada $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ é $C^{r-1}, \forall i$.

Regra da Cadeia: $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $g: V \to \mathbb{R}^k$, $f(\mathcal{U}) \subset V$, ambas C^r então $g \circ f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ é C^r e

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

- $f: \mathcal{U} \to V = f(\mathcal{U})$, $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos é chamada de difeomorfismo C^r se f possui inversa $f^{-1}: V \to \mathcal{U}$ de classe C^r.

definição (Difeo Local) $f : W \to \mathbb{R}^m$ é difeo local quando para todo $p \in W$ existir uma vizinhança $\mathcal{U} \subset W$ de p tal que:

$$f|\mathcal{U} : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^m \text{ é difeo.}$$

Cartas Locais & Atlas

definição (Carta Local) Seja M um espaço topológico. Uma carta local é um par $(\mathcal{U}, \varphi)$ onde $\mathcal{U}$ é um aberto de M e $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo sobre o aberto $\varphi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^m$.

definição (Atlas). Um atlas $\mathcal{A}$ de dimensão m e classe C^r sobre M é uma coleção de cartas locais tais que:

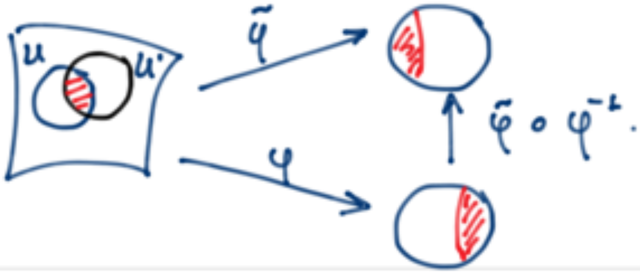
i) $\displaystyle\bigcup_{(\mathcal{U},\varphi) \in \mathcal{A}} \mathcal{U} = M$

ii) se $(\mathcal{U}, \varphi), (\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ então a aplicação

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \longrightarrow \tilde{\varphi}(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}})$$

é um difeo C^r entre abertos de $\mathbb{R}^m$.

Tais difeos são chamados **mudanças de coordenadas**.



• Sejam M, N espaços topológicos com atlas C^r, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente.

definição: $f: M \to N$ é diferenciável de classe C^k, $k \le r$ se f é contínua e para cada $x \in M$ existem cartas locais

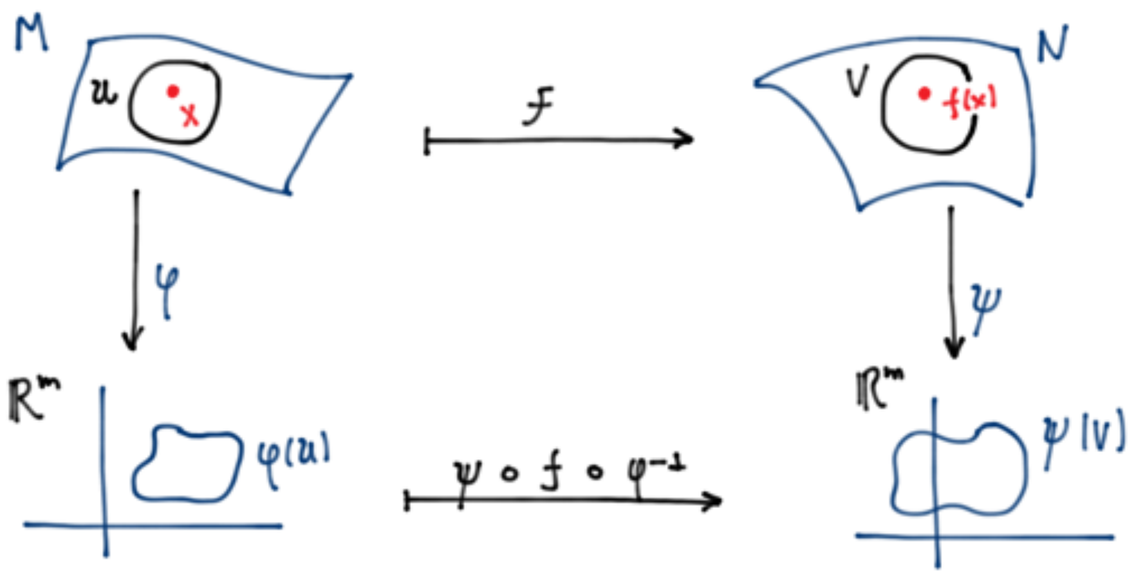
$$(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}, \quad x \in \mathcal{U}$$

$$(V, \psi) \in \mathcal{B}, \quad f(x) \in V$$

tais que:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m.$$

é de classe C^k



Obs. Essa defi. independe das cartas locais escolhidas pois as mudanças de coordenadas são C^r- difeos.

definição: Um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^r sobre M é chamado máximo quando ele contém todas as cartas locais $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ cujas mudanças de coordenadas com elementos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \longrightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$$

são difeomorfismos C^r.

definição (Variedade Diferenciável)

Uma variedade diferenciável de classe C^r e dimensão m é um espaço topológico de Hausdorff M com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r, ou seja, um atlas máximo de dim. m e classe C^r.

- A menos que deixemos indicado, todas as variedades que usaremos serão $\underline{C^\infty}$.

definição: $f : M \to N$ de classe C^r, $r \geq 1$ é dita um difeomorfismo de classe C^r quando existe $f^{-1} : N \to M$ e $f^{-1} \in C^r$.

Neste caso escrevemos: $M \simeq N$.

Exemplo. Espaços reais projetivos

$\mathbb{P}^n$, $n \geq 1$ é o cjto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim \quad , \text{ onde } u \sim v \Leftrightarrow \exists\, t \neq 0 \text{ com } u = t.v$$

Consideramos $\mathbb{P}^n$ com a topologia quociente,

$$\mathcal{U} \subset \mathbb{P}^n \text{ é aberto} \iff \pi^{-1}(\mathcal{U}) \text{ é aberto em } \mathbb{R}^{n+1} - \{0\},$$

onde $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ é a aplicação quociente.

- $\mathbb{P}^n$ c/ esta top é Hausdorff e compacto e é chamado espaço projetivo real de dimensão n.

Atlas C^∞ de $\mathbb{P}^n$: Para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$ seja

$$\mathcal{U}_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}.$$

Definimos $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi_i [x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}] = \frac{1}{x_i} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}).$$

É fácil ver que: se $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto \frac{1}{y_i} (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \dots, y_n)$$

e $\therefore$ é C^∞.

Assim $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ é um atlas C^∞ de $\mathbb{P}^n$.

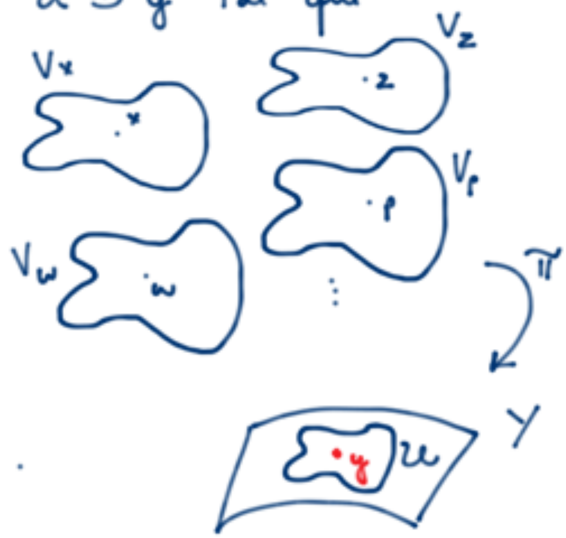
Exemplo. Estrutura de variedade em espaços de recobrimento.

— X e Y espaços top. localmente conexos por caminhos, Y conexo.

Dizemos que uma aplicação contínua e sobrejetora $\pi : X \to Y$ é um recobri mento se satisfaz:

a) $\forall\, y \in Y$, existe uma vizi. conexa $\mathcal{U} \ni y$ tal que

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{x \in \pi^{-1}(y)} V_x$$



onde, para cada $x \in \pi^{-1}(y)$, a restrição $\pi/V_x : V_x \to \mathcal{U}$ é homeo.

b) Se $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ e $x_1 \neq x_2$ então $V_{x_1} \cap V_{x_2} = \emptyset$.

Em particular $\pi^{-1}(y)$ é discreto e NÃO possui pto de acumulação.

Nomenclatura: · $\mathcal{U}$: vizinhança distinguida de y

· $\pi^{-1}(y)$: fibra de y.

Situações importantes: 1. Suponha que X é recobrimento de uma variedade diferenciável Y.

Podemos induzir em X uma estrutura diferenciável de forma que:

* $\dim X = \dim Y$
* $\pi : X \to Y$ é difeo local C^∞.

Seja $x \in X$, tome $y = \pi(x)$.