Teorema da Vizinhança Tubular: Seja $N \subset M$ uma subvariedade C^r com $r \geq 1$. Existem uma vizinhança aberta $T(N) \supset N$ e uma submersão C^r, $\pi : T(N) \longrightarrow N$ tais que $\pi(q) = q \ \forall \ q \in N$. Se a codimensão de N é k, então $T(N)$ pode ser obtida de forma que $(T(N), \pi, N, \mathbb{R}^k)$ seja um espaço fibrado.

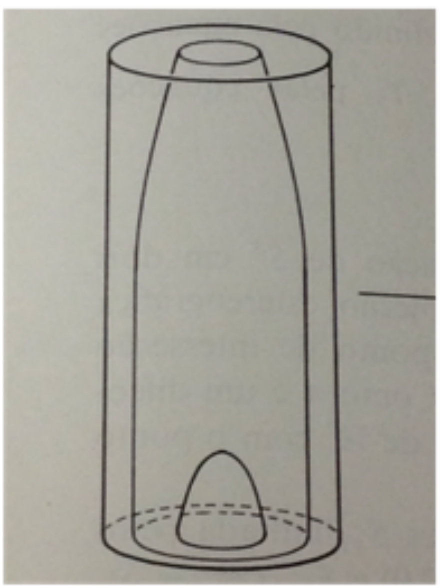
Exemplo: (Folheação de Reeb)

Consideremos a submersão $f : D^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r) \cdot e^{x_3} \quad \text{onde} \quad \alpha(r) = \exp\left(-\exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right)\right).$$

A folheação definida por f tem por folhas os gráficos das funções

$$x_3 = \exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right) + b \,, \ b \in \mathbb{R}.$$



Desenho retirado do livro do Camacho e Lins Neto.

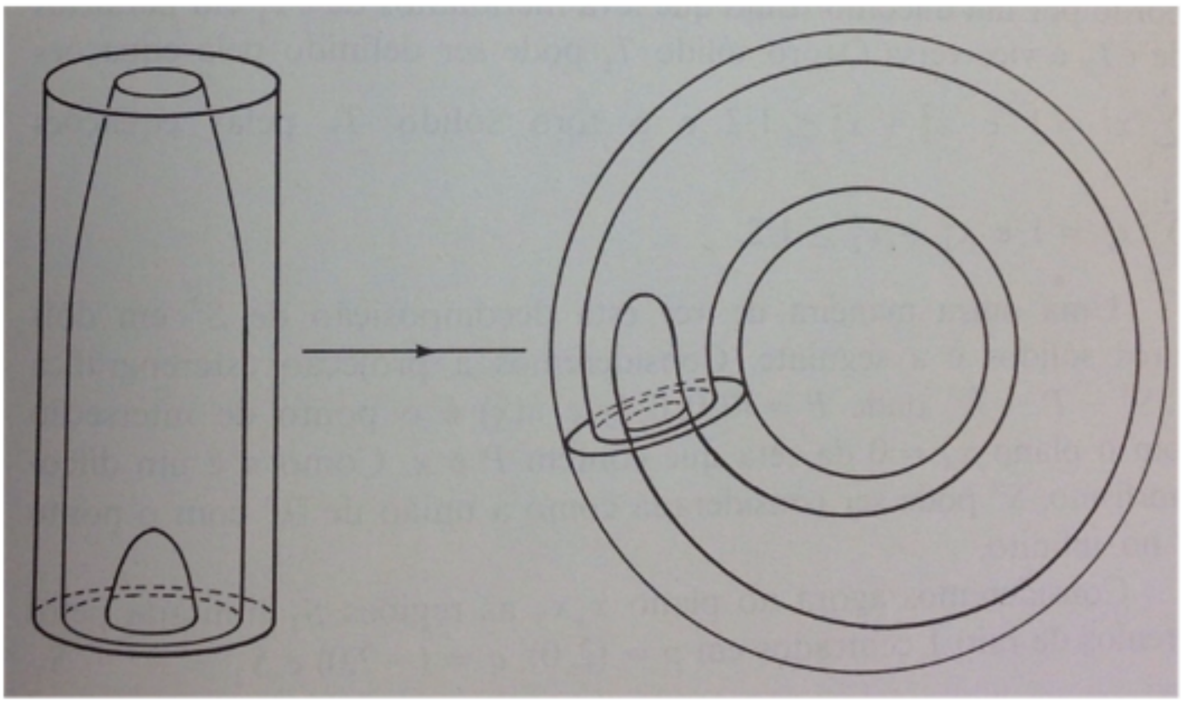
Agora identificamos os pontos do bordo de $D^2 \times [0,1]$ de forma natural:

$$(x_1, x_2, 0) \equiv (y_1, y_2, 1) \iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2).$$

Com esta identificação temos: $D^2 \times [0,1]/_{\equiv} \simeq D^2 \times S^1$ que é o Toro sólido.

definição: A folheação $\mathcal{R}$ induzida no quociente é chamada de folheação de Reeb.

Observe que $\mathcal{R}$ é C^∞ e tem $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ como uma de suas folhas.



Retirado de Camacho - Lins Neto

Todas as folhas de $\mathcal{R}$ (exceto $S^1 \times S^1$) são homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ e se acumulam no bordo.

Folheação de Reeb em S^3: Sejam $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^4$, toros sólidos definidos por:

$$T_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \ \text{ e } \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2 \right\}$$

$$T_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \ \text{ e } \ x_1^2 + x_2^2 \geq 1/2 \right\}$$

Então $S^3 = T_1 \cup T_2$. Em T_1 e em T_2 temos as folheações de Reeb $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Assim, a junção de ambas nos dá a folheação de Reeb $\mathcal{R}$ em S^3.

Esta é uma folheação C^∞ de codimensão $\underline{1}$ de S^3 com uma folha compacta (homeomorfa a $\mathbb{T}^2$) e todas as outras homeomorfas a $\mathbb{R}^2$.

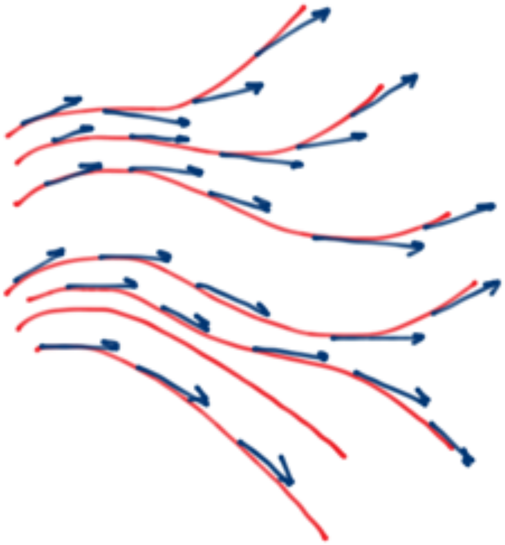
Exemplo 4: Campos de vetores não singulares

Seja M uma variedade. Um campo de vetores em M é uma aplicação que associa a cada $x \in M$ um vetor $X(x) \in T_x M$.

Seja X um campo de vetores em X, podemos associar a X uma EDO:

$$\frac{dx}{dt} = X(x).$$

Uma solução desta EDO é uma curva $\gamma : (a,b) \to M$ tal que:



$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad t \in (a,b)$$

Uma tal curva γ com $\gamma(0) = x$ é dita uma órbita ou curva integral de X por x.

• A existência de tais curvas é garantida pelo Teorema de Existência e unicidade para EDO's.

Quando X não possui singularidades (ou seja $X(x) \neq 0$, $\forall x \in M$) as órbitas de X são folhas de uma folheação de dimensão 1 em M.

* Para construir as cartas locais tome uma transversal local aberta T e considere um difeo. de T em $(0,1)^{m-1}$, digamos $\rho : T \to (0,1)^{m-1}$.

Tome $\mathcal{U} = \varphi(T \times (0,s))$, onde s é pequeno e φ é o fluxo. A carta é dada por: $\varphi(x) = (\rho(T \cap \mathcal{O}(x)); t)$ onde $x = \varphi_t(T \cap \mathcal{O}(x))$.

A construção da carta ficará mais clara mais tarde onde faremos bonitinho o caso de fluxos.

Ações de grupos de Lie

definição: Um grupo de Lie G é um grupo que possui uma estrutura diferenciável C^∞ tal que a aplicação

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y^{-1} \end{aligned}$$

é C^∞.

Exemplos: 1) $(\mathbb{R}^n, +)$

2) $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$

3) $(\mathbb{T}^n, \cdot)$ onde $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ e a multiplicação é feita coordenada a coordenada.

4) $GL(n, \mathbb{R})$ = matrizes $n \times n$ com $\det \neq 0$.

definição. Uma ação de classe C^r de um grupo de Lie G numa variedade M é uma aplicação $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ de classe C^r tal que:

1) $\varphi(e, x) = x, \ \forall x$

2) $\varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$, $g_1, g_2 \in G$, $x \in M$.

A órbita de um ponto $x \in M$ pela ação φ é o conjunto:

$$\mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi(g,x) : g \in G\}.$$

O grupo de isotropia de $x \in M$ é o subgrupo (fechado) dado por:

$$G_x(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g,x) = x\}.$$

A aplicação $\psi_x : G \to M$ dada por $\psi_x(g) = \varphi(g,x)$ induz a aplicação

$$\begin{aligned} \overline{\psi_x} : G/G_x(\varphi) &\longrightarrow M \\ \overline{g} &\longmapsto \psi_x(g) \end{aligned} \qquad \text{onde } \overline{g} = g \cdot G_x(\varphi).$$

Ex. $\overline{\psi_x}$ é bem definida e injetiva.

Além disso o espaço quociente $G/G_x(\varphi)$ é uma variedade e $\overline{\psi_x}$ é uma imersão injetiva.

definição (Ação Folheada) Dizemos que $\varphi : G \times M \to M$ é uma ação folheada se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $x \in M$:

$$\dim(T_x \mathcal{O}_x(\varphi)) = k$$

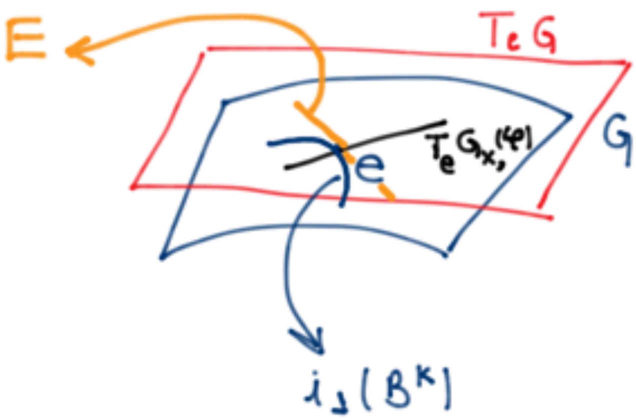
Quando $k = \dim G$ dizemos que φ é localmente livre.

Teorema. As órbitas de uma ação folheada definem as folhas de uma folheação.

prova. Seja $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ uma ação folheada cujas órbitas tem dimensão $k \geq 1$.

Fixado $x_0 \in M$, tome:

1. $E \subset T_e G$ um subespaço complementar a $T_e G_{x_0}(\varphi)$
2. $i_1 : B^k \longrightarrow G$, $i_1(0) = e$, mergulho de um k-disco tangente a E em e (ou seja $B^k \subset M$ e $T_e\, i_1(B^k) = E$)



<u>Obs</u>: $O_x(\varphi) = \operatorname{Im}(\overline{\varphi}_x) = \overline{\varphi}_x\left(G/G_x(\varphi)\right)$.

Logo $k = \dim O_x(\varphi) = \dim\left(G/G_x(\varphi)\right) = \dim G - \dim G_x(\varphi)$

$\therefore\ \dim G_x(\varphi) = n - k$. Assim $\dim E = \underline{k}$.

Considere $i_2 : B^{m-k} \longrightarrow M$, $i_2(0) = x$, o mergulho de uma pequena seção transversal à $O_{x_0}(\varphi)$ em x_0.

Defina $\Phi : B^k \times B^{m-k} \longrightarrow M^m$ dada por

$$\Phi = \varphi(i_1, i_2)$$

Como $D\Phi(0,0) = D\varphi \circ (Di_1, Di_2) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{m-k} \longrightarrow T_{x_0}M$ é isomorfismo, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 tal que:

$$\Phi^{-1} : \mathcal{U} \longrightarrow B^k \times B^{m-k} \text{ é difeomorfismo}$$

e leva a órbita de $i_2(x) \in \mathcal{U} \cap i_2(B^{m-k})$ em um aberto de $B^k \times \{x\}$.
Assim $(\mathcal{U}, \Phi^{-1})$ define uma carta local da folheação por órbitas de φ c.q.d ■

Fluxos em geral. Uma ação $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ é chamada de fluxo em M. Em particular φ satisfaz:

a) $\varphi(0,x) = x, \ \forall x$

b) $\varphi(s+t, x) = \varphi(s, \varphi(t,x)), \ \forall \ s,t \in \mathbb{R}, \ x \in M$.

Um fluxo C^r está associado a um único campo de vetores C^{r-1} da seguinte forma.

- dado φ defina X por: $X(x) = \left.\frac{d}{dt}\varphi(t,x)\right|_{t=0}$.

Neste caso a órbita de X por x será $O_x(\varphi)$: de fato

$$\frac{d}{dt}\varphi(t,x) = \left.\frac{d}{ds}\varphi(t+s, x)\right|_{s=0} = \left.\frac{d}{ds}\varphi(s, \varphi(t,x))\right|_{s=0} = X(\varphi(t,x)).$$