UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC

Teoria de Ramsey

Aluno: Lucas de Jesus da Silva
Orientador: Gabriel Ponce

Campinas
Novembro de 2017

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador Gabriel Ponce, por ter me aceitado como aluno de iniciação científica e por sempre ter me dado o suporte necessário para produção desse relatório, ganhando assim minha admiração e tornando-se uma grande referência para mim no campo da matemática. Agradeço ao meus companheiros de pesquisa Douglas Finamore, Marcielis Espitia e especialmente ao Lucas Hamada que me ajudou em algumas demonstrações. Os últimos agradecimentos são dedicados aos meus amigos do ProFIS, aos professores Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto e Washington Luís Peixoto, e finalmente aos meus pais e familiares por sempre me apoiarem. A todos desejo sucesso e um forte abraço.

Resumo

O relatório tem como base o livro *Ramsey Theory on the Integers*[3], seguindo fortemente a sua cronologia e adotando grande parte de seus exemplos. Ele nos dará uma boa base para entender um importante campo da matemática, a notória teoria de Ramsey. De fato, esse relatório não abordara a teoria de Ramsey em toda sua plenitude, nosso escopo aqui será direcionado a uma pequena parte desse universo. Nos contentaremos com apenas a apresentação e prova de alguns teoremas, dentre eles o teorema de Ramsey para duas cores e o teorema de van der Waerden.

O primeiro capítulo será inteiramente dedicado a apresentação do Princípio da casa dos pombos, uma importante ferramenta matemática e que servirá como base para entendermos os teoremas seguintes do tipo Ramsey. Mostraremos algumas formas alternativas e utilizaremos exemplos variados para fixar bem o Princípio da casa dos pombos.

Já no segundo e terceiro capítulo apresentaremos e demonstraremos o teorema de Ramsey para duas cores e o teorema de van der Waerden. Introduziremos as notações que serão utilizadas constantemente e os três teoremas clássicos da teoria de Ramsey. Sempre utilizaremos uma variedade de exemplos, mostrando algumas consequências que desses teoremas, variantes e aplicações destes teoremas.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Preliminares

Este relatório, assim como o livro que serviu-lhe como base, cobre apenas uma pequena fração de toda teoria de Ramsey. Nos concentraremos principalmente na prova de dois teoremas clássicos dessa teoria. Vale salientar àqueles que não tem um vasto conhecimento em matemática, a pequena parte da teoria de Ramsey que será abordada neste relatórios exige apenas conhecimentos básicos de matemática e pode ser compreendida sem grandes problemas.

A teoria de Ramsey foi nomeada em homenagem a Frank Plumpton Ramsey e um de seus importantes teoremas, o qual foi provado em 1928 e publicado em 1930 e que seremos apresentados posteriormente. Não existe uma definição universal para “Teoria de Ramsey”, mas podemos defini-lá informalmente da seguinte maneira:

> O estudo da Teoria de Ramsey é definido como o estudo da conservação das propriedades sob um conjunto de partições.
> Em outras palavras, dado um conjunto particular S que tenha uma propriedade P, é verdade que qualquer S particionado em finitos subconjuntos deve ter também a propriedade P?

Para ilustrar, de forma mais clara, os tipos de problemas da Teoria de Ramsey, aqui estão alguns exemplos clássicos de problemas do tipo-Ramsey.

Exemplo 1.1. Obviamente, a equação $x+y=z$ tem soluções no conjunto dos inteiros positivos (existe um número infinito de soluções); por exemplo, $x=1$, $y=4$, $z=5$ é uma solução. Consideremos a seguinte questão: é verdade que sempre que o conjunto de inteiros positivos é particionado em um número finito de conjuntos $S_1, S_2, \cdots, S_r$, então pelo menos um destes conjuntos vai conter uma solução para $x+y=z$? Esta questão será respondida no capítulo seguinte, mais precisamente com apresentação do Teorema2.14.

Exemplo 1.2. É verdade que sempre que o conjunto $\{1, 2, \cdots, 100\}$ é dividido em dois subconjuntos A e B, então pelo menos um desses conjuntos contém um par de inteiros cuja diferença seja exatamente 2? Para responder essa questão, considere a divisão consistindo de

$$A = \{1, 5, 9, 13, \cdots, 97\} \cup \{2, 6, 10, \cdots, 98\}$$

e

$$B = \{3, 7, 11, 15, \cdots, 99\} \cup \{4, 8, 12, \cdots, 100\}$$

Suponhamos por absurdo que em A ou B existam dois números que a diferença seja exatamente dois, ou seja, $a - b = 2$. No primeiro caso temos o conjunto A, para $a, b \in A$, sendo somente pares, somente impares ou impar e par. Seja uma sequência $a = 1 + 4n$ e $b = 1 + 4m$, para $n, m \in \mathbb{N}^*$ e $n > m$, se subtrairmos $a - b$ chegamos em:

$$\begin{aligned} a - b &= (1 + 4n) - (1 + 4m) \\ \Rightarrow a - b &= 4n - 4m \\ \Rightarrow 2 &= 4(n - m) \\ \Rightarrow n - m &= 1/2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Absurdo! Pois $n - m$ deve ser um número natural. O mesmo ocorre para as sequências $a = 2 + 4n$ e $b = 2 + 4m$, e também para as sequências $a = 2 + 4n$ e $b = 1 + 4m$. No segundo caso temos o conjunto B, para $a, b \in B$, onde a, b são somente pares, somente impares ou impar e par. E novamente obtemos os mesmos resultados do primeiro caso. Logo, não há em nenhum dos subconjunto A e B dois números que a diferença seja exatamente dois.

Exemplo 1.3. Verdadeiro ou falso: Se existem 18 pessoas em um grupo, então deve existir 4 pessoas que são mutualmente conhecidas entre si, ou 4 pessoas que são mutualmente desconhecidas entre si. Veremos no capítulo seguinte que isso é verdade.

A teoria de Ramsey tem uma vasto campo de estruturas e conjuntos onde ela pode ser aplicada. Isso inclui os números reais, estruturas algébricas tais como os grupos ou espaços vetoriais, grafos, pontos em um plano ou em n dimensões, entre outros.

Para que possamos entender o *teorema de Ramsey*, que será nos introduzido no capítulo seguinte, e assim como outros teoremas presentes na teoria de Ramsey é importante conhecermos um princípio extremamente importante: o princípio da casa dos pombos.

1.1 Princípio da casa dos pombos

Imaginemos então que estamos em um telhado onde se encontra um pombal. Vamos estabelecer que, dado um numero de casas de pombos n e um número de pombos $n + 1$, você deverá colocar todos os pombos dentro de casas do pombal. Sendo assim, o que pode se dizer sobre a quantidade de pombos em cada casa? Colocando cada pombo em alguma casa, sem que sobre nenhum, podemos afirmar que existe uma casa de pombos que deverá conter mais do que um pombo, ou seja, dois pombos irão ocupar a mesma casa.

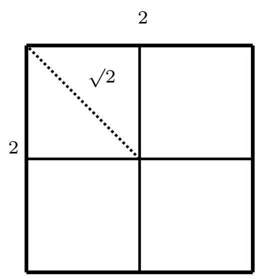
Esse é o princípio da casa dos pombos (também conhecido como teorema de Dirichlet ou princípio das gavetas de Dirichlet)[1], em poucas palavras:
Se mais do que n pombos são colocados em n casas, então pelo menos uma casa contém mais do que n pombos.

Escrevendo agora na forma de notações matemáticas, temos dois teoremas fundamentais.

[1]Há registros de que esse conceito apareceu primeiro no século XIX, em um trabalho feito pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)[4].

Teorema 1.4 (Princípio da casa dos pombos básico)**.** *Se um conjunto de n elementos quaisquer é dividido em r subconjuntos disjuntos, onde $n > r$, então pelo menos um dos subconjuntos contém mais do que um elemento.*

Exemplo 1.5. Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostremos que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$. [5]



Consideremos as casas do pombal nossos setores do quadrado acima e nossos pombos os pontos que serão escolhidos ao acaso. Pelo princípio da casa dos pombos, existem pelo menos dois pontos no mesmo setor. Contudo, se observamos a maior distância entre dois pontos neste setor, temos a diagonal de um quadrado de lado 1, ou seja, uma diagonal de comprimento $\sqrt{2}$.

Teorema 1.6 (Princípio da casa dos pombos generalizado)**.** *Se mais do que mr elementos são divididos em r conjuntos, então pelo menos algum dos conjuntos contém mais que m elementos.*

Demonstração. Seja S um conjunto $|S| > mr$. Seja $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r$ sendo qualquer divisão de S em subconjuntos disjuntos. Suponhamos por absurdo , que $|S_i| \leq m$ para todo $i = 1, 2, \cdots, r$. Então

$$|S| = \sum_{i=1}^{r} |S_i| \leq \sum_{i=1}^{r} m = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{r} \Rightarrow |S| \leq mr \tag{1.2}$$

Absurdo, pois $|S| \leq mr$ contradiz a hipótese inicial que $|S| > mr$. Podemos concluir então que, para pelo menos um i, o conjunto $|S_i|$ contém mais que m elementos, i.e., $|S_i| \geq m + 1$. □

Uma generalização interessante é a seguinte. Denote por $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira de x.

Proposição 1.7. *Se dividirmos n elementos em k conjuntos, então ao menos um dos conjuntos conterá, no mínimo, $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ elementos.*

Demonstração. Vamos assumir por absurdo que existe uma forma de dividirmos um conjunto $\mathcal{A}$ com n elementos em k conjuntos, de forma que todos os conjuntos conterão no máximo $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$ elementos. Então, o número de elementos de $\mathcal{A}$ é no máximo $k\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor \leq n$. E isso é um absurdo, uma vez que $\mathcal{A}$ tem n elementos. □

O princípio da casa dos pombos pode parecer simples, mas tem grandes aplicações na resolução de alguns problemas. Por último, note que o Teorema 1.4 é um caso do Teorema 1.6 quando o nosso $m = 1$.

Aqui estão alguns exemplos de aplicações.

Exemplo 1.8. Para cada inteiro $n = 1, 2, \cdots, 200$, Seja $R(n)$ o resto da divisão de n por 7. Então algum valor de $R(n)$ deve ocorrer pelo menos 29 vezes.

Para ver isso, nós podemos considerar os 200 inteiros como os pombos, e os sete possíveis valores de $R(n)$ como as casas. Logo, através do Teorema 1.6 concluímos que, uma vez que $200 > 28 \cdot 7$, pelo menos uma das casas deve conter mais do que 28 elementos.

Exemplo 1.9. (OMU - Terceira Fase 2017 - Nível Beta) Dado um par ordenado $v = (x, y)$ de números reais, definimos a *norma de* v $||v||$ como sendo o valor $\sqrt{x^2 + y^2}$ e denotamos:

$$||v|| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Seja S um conjunto de 7 pontos no plano cartesiano de forma que para todo $v \in S$ temos $1 \leq ||v|| \leq 8$. Mostraremos que existem três pontos $a, b, c \in S$ de forma que

$$\frac{3}{2} < \frac{||a||}{||b||} + \frac{||b||}{||c||} + \frac{||c||}{||a||} < 6.$$

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os pontos cuja distância da origem está entre 1 e 8, ou seja, $\mathcal{P} := \{v = (x, y) : 1 \leq ||v|| \leq 8\}$. Ele é representado como um anel no plano cartesiano. Particionaremos $\mathcal{P}$ em três subconjuntos disjuntos definidos como

$$\mathcal{P}_1 = \{v = (x, y) : 1 \leq ||v|| \leq 2^1\}$$
$$\mathcal{P}_2 = \{v = (x, y) : 2^1 \leq ||v|| \leq 2^2\}$$
$$\mathcal{P}_3 = \{v = (x, y) : 2^2 \leq ||v|| \leq 2^3\}$$

Se $S \subset \mathcal{P}$, pelo princípio da casa dos pombos existe um conjunto $\mathcal{P}_j$, para $j = \{1, 2, 3\}$, que contém pelo menos 3 pontos. Sejam $a, b, c \in S$ estes três pontos de forma que $a, b, c \in \mathcal{P}_j$, temos

$$2^{j-1} \leq ||a|| \leq 2^j,\ 2^{j-1} \leq ||b|| \leq 2^j,\ 2^{j-1} \leq ||c|| \leq 2^j$$

pela definição de $\mathcal{P}_j$. Logo,

$$\frac{2^{j-1}}{2^j} \leq \frac{||a||}{||b||} \leq \frac{2^j}{2^{j-1}} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{||a||}{||b||} \leq 2$$

Obtemos o mesmo resultado para $\frac{||b||}{||c||}$ e $\frac{||c||}{||a||}$. Então,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{||a||}{||b||} + \frac{||b||}{||c||} + \frac{||c||}{||a||} \leq 2 + 2 + 2$$

$$\frac{3}{2} \leq \frac{||a||}{||b||} + \frac{||b||}{||c||} + \frac{||c||}{||a||} \leq 6.$$

Contudo se observarmos para os casos particulares $\frac{||a||}{||b||} = \frac{||b||}{||c||} = \frac{||c||}{||a||} = 2$ e $\frac{||a||}{||b||} = \frac{||b||}{||c||} = \frac{||c||}{||a||} = \frac{1}{2}$ chegamos à contradição $||a|| = 8||a||$ e $||a|| = 2^{-1}||a||$ respectivamente. Sendo assim, podemos concluir então que

$$\frac{3}{2} < \frac{||a||}{||b||} + \frac{||b||}{||c||} + \frac{||c||}{||a||} < 6.$$

Exemplo 1.10. (Erdős-Szekeres) Vamos mostrar que dentro de qualquer sequência de n^2+1 inteiros, existe uma subsequência monótona de comprimento $n+1$.(Uma sequência é chamada de monótona se é crescente ou decrescente). Seja nossa sequência $\{a_i\}_{i=1}^{n^2+1}$. Para cada $i \in \{1, 2, \cdots n^2+1\}$, considere ℓ_i o comprimento mais longo de subsequências crescentes começando em a_i.

Suponha por absurdo que não exista uma sequência monótona crescente de comprimento $n+1$, ou seja, $\ell_i \leq n$, para todo $1 \leq i \leq n^2+1$. Temos n^2+1 pombos (os ℓ_i's) e n casas (comprimentos das subsequências), podemos afirmar pelo princípio da casa dos pombos que ao menos uma das casas terá

$$\left\lfloor \frac{(n^2+1)-1}{n} \right\rfloor + 1 = n+1$$

pombos, ou seja, há $n+1$ dos ℓ_i's com o mesmo tamanho.Tomemos $J = \{a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_{n+1}}\}$. Se os ℓ_i's são do mesmo tamanho, então $\ell_{k_1} = \ell_{k_2} = \cdots = \ell_{k_{n+1}}$, podemos então assumir que $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1}$. Vamos mostrar por absurdo que $a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_{n+1}}$ não ocorre. Então, deve existir i tal que $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$. Se isso ocorre, isso contradiz o fato de $\ell_{k_1} = \ell_{k_2} = \cdots = \ell_{k_{n+1}}$, pois se $\ell_{k_{i+1}} = \alpha$, então o $\ell_{k_i} = \alpha + 1$.

Exemplo 1.11. Vamos colorir cada ponto no plano xy que coordenada inteiras, de vermelho ou de azul. Vamos mostrar que deve existir um retângulo com todos os vértices de mesma cor. Considere as linhas $y = 0$, $y = 1$ e $y = 2$ e suas intersecções com as linhas $x = i$, para $i = 1, 2, \cdots, 9$. Em cada linha $x = i$ estão três intersecções coloridas, cada uma colorida de vermelho ou azul.

Dados três pontos que pertencem à linha $x = i$, pelo princípio da casa dos pombos, existe uma cor que vai ser utilizada pelo menos duas vezes. Podemos colorir cada uma das linhas $x = i$ contendo os três pontos de 8 formas diferentes, uma vez que temos 2^3 possibilidades. Se temos 9 linhas, pelo princípio da casa dos pombos, ao menos uma das linhas $x = i$ tem a mesma configuração. Logo, se isso ocorre, existe um retângulo com todos os vértices da mesma cor.

Note no exemplo anterior que nós denotamos as casas como sendo cores, para representar uma partição do conjunto. Isso é frequentemente utilizado em diversas áreas da teoria de Ramsey.

Capítulo 2

Teorema de Ramsey

F. P. Ramsey (Cambridge, 1903 - Londres, 1930) foi um matemático, economista e filósofo britânico. Ele formulou e provou seu teorema em 1928, tendo sido publicado só após a sua morte em 1930 na *Proceedings of the London Mathematical Society*[7], com o título *On a Problem of Formal Logic.* Apesar da sua morte precoce, Ramsey deixou uma grande contribuição para teoria que posteriormente ganharia seu nome[9].

O teorema de Ramsey pode ser considerado um aperfeiçoamento do princípio da casa dos pombos, onde nós não apenas garantimos um certo número de elementos nas casas de pombos, mas também garantimos uma certa relação entre esses números. Este teorema é normalmente mencionado na matemática no estudo de grafos. Iremos definir o que é um grafo de modo genérico e logo em seguida finalmente apresentaremos o teorema de Ramsey. Mas antes de fazer isso, vamos dar uma olhada no famoso exemplo conhecido como problema da festa.

2.1 Problema da Festa

O Problema da Festa é uma das principais questões quando falamos sobre a aplicação do teorema de Ramsey, apesar de ser um problema simples, entender seu funcionamento é extremamente necessário para darmos os primeiros passos em direção ao teorema de Ramsey. Veremos a seguir um exemplo do Problema da Festa e uma de suas variações.

Exemplo 2.1. Provaremos o seguinte: em uma festa com seis pessoas, existe três pessoas que são mutualmente conhecidas entre si ou três pessoas que são mutualmente estranhas entre si.

Vamos chamar uma pessoa da festa de Θ que é um vértice de um grafo K_6, onde cada pessoa representa um vértice deste grafo. Ela tem visão de outras 5 pessoas, das quais podemos afirmar, pelo princípio da casa dos pombos, que pelo menos 3 são conhecidas ou desconhecidas por θ. Vamos usar as cores azul para conhece e vermelho para não conhece. Sendo assim, sem perder a generalidade, consideremos as 3 arestas azuis e denotemos seu vértices como A, B e C. Se existir alguma dessas arestas, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, com a cor azul, temos um triangulo da mesma cor e está provado. Vamos considerar então que as arestas não serão coloridos com a cor azul. Mas se nenhuma pode ser azul então todas devem

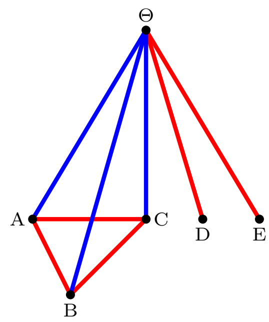


Figura 2.1: Problema da Festa

ser vermelhas e se todas são vermelhas, existe um $\triangle ABC$ com todas as arestas vermelhas (Figura 2.1).

De forma análoga ao exemplo anterior, podemos resolver o Exemplo 1.3 da seguinte forma:

Devemos mostrar que é verdadeiro, ou falso, que se existe um grupo com 18 pessoas, então deve existir 4 pessoas que são mutualmente conhecidas entre si ou 4 pessoas que são mutualmente desconhecidas entre si. Primeiramente, veja que para um grupo com 9 pessoas, temos 4 pessoas que se conhecem mutualmente entre si ou 3 que não se conhecem entre si. Sabendo disso, vamos chamar uma pessoa desse grupo de Θ, ela terá visão de outras 17 pessoas. Sendo assim, vamos conectar essas 17 pessoas através de uma aresta à Θ. Vamos definir, sem perder a generalidade, que essas arestas devem ser coloridas de azul se são mutualmente conhecidas entre si e de vermelho se são mutualmente desconhecidas entre si. Pelo princípio da casa dos pombos, podemos afirmar que existe pelo menos 9 nove arestas coloridas de azul ou vermelho conectadas à Θ, ou seja, temos um subgrupo com 9 pessoas. Logo, podemos afirmar que em grupo com 18 pessoas existe 4 pessoas que são mutualmente conhecidas entre si ou 4 pessoas que são mutualmente desconhecidas entre si.

2.2 Teorema de Ramsey

Logicamente, o Problema da Festa é apenas um caso particular do teorema de Ramsey. Antes de introduzirmos o teorema de Ramsey, devemos nos atentar para algumas definições sobre a teoria dos Grafos. Elas são necessárias uma vez que essas são as estruturas centrais desse teorema.

Definição 2.2. Um grafo $G = (V, E)$ é um par onde V é um conjunto de pontos, chamados vértices, E é um conjunto de pares de vértices, chamado de arestas.

Definição 2.3. Um subgrafo $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Definição 2.4. Um grafo completo com n vértices, que denotaremos por K_n,

Figura 2.2: Grafos de R(2,2)

é um grafo de n vértices com a propriedade que todos os pares de vértices são conectados por uma aresta.

Definição 2.5. Uma coloração de arestas de um grafo é uma atribuição de cores para as arestas do grafo. Um grafo qualquer que tenha arestas coloridas é chamado um *grafo monocromático* se todas arestas são da mesma cor.

Vamos expressar a solução do problema da festa agora através da linguagem da teoria dos grafos. No caso do Exemplo 2.1, podemos dizer que um grafo K_6 colorido por duas cores, admite um subgrafo K_3 de cor azul ou um subgrafo K_3 de cor vermelha.

Iniciaremos então o teorema apenas com duas cores.

Teorema 2.6 (Teorema de Ramsey para Duas Cores)**.** *Sejam $k, l \geq 2$. Existe um menor inteiro positivo $R = R(k,l)$ tal que toda a coloração de arestas de K_R, com as cores vermelho e azul, admite um subgrafo K_k vermelho ou um subgrafo K_l azul.*

Demonstração. Vamos estabelecer primeiro nosso método de indução, notemos que $R(k,2) = k$ para todo $k \geq 2$ e $R(2,l) = l$ para todo $l \geq 2$. Para $k + l = 4$ e $k + l = 5$, notemos que também é fácil, pois $R(2,2) = 2$ e $R(3,2) = 3$ respectivamente. Consequentemente, seja $k + l \geq 6$, com $k, l \geq 3$, nós podemos assumir que existe $R(k, l-1)$ e $R(k-1, l)$. Vamos mostrar que $R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1)$, para $k, l \geq 3$, provando assim o teorema. Nosso grafo será K_n, com $n = R(k-1,l) + R(k,l-1)$. Vamos chamar um desses vértices de v, sendo assim existem $n-1$ vértices conectados através de uma aresta à v. Seja A o número de tais arestas vermelhas e B o número de tais arestas azuis, conectadas à v. Suponhamos por absurdo que $A < R(k-1,l)$ e $B < R(k,l-1)$. Sendo assim, A e B como $A \leq R(k-1,l) - 1$ e $B \leq R(k,l-1) - 1$.
Então:

$$\begin{aligned} A + B &\leq \{R(k-1,l) - 1\} + \{R(k,l-1) - 1\} \\ A + B &\leq \underbrace{R(k-1,l) + R(k,l-1)}_{n} - 2 \\ A + B &\leq n - 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Absurdo!!! Então $A \geq R(k-1,l)$ ou $B \geq R(k,l-1)$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $A \geq R(k-1,l)$. Seja V o conjunto de vértices conectado à v por arestas vermelhas, temos que $|V| \geq R(k-1,l)$. Pela hipótese de indução, K_V contém um subgrafo vermelho K_{k-1} ou um subgrafo azul K_l. Se tem um subgrafo azul K_l, está provado. Se contém um subgrafo vermelho K_{k-1}, estando apenas conectado por arestas vermelhas ao vértice v, nós temos um subgrafo K_k, uma vez que só podemos conectá-lo por arestas vermelhas (ou obteremos um subgrafo K_l azul). E assim a prova do teorema está completa. □

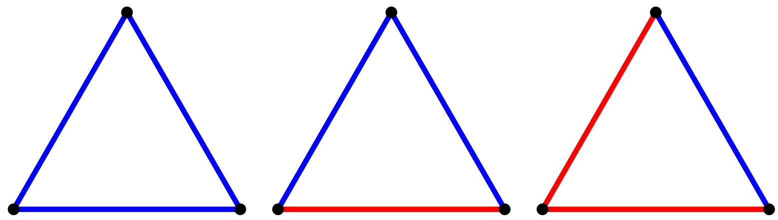


Figura 2.3: Grafos de R(3,2)

Os números $R(k, l)$ são conhecidos como o número de Ramsey para duas cores. A solução para o problema da festa nos diz que $R(3, 3) = 6$. Pelo Teorema de Ramsey, nós podemos estender o problema da festa de várias outras formas. Por exemplo, nós sabemos que existe um número n de forma que, estando n pessoas em uma festa, então deveria ter ou um grupo de quatro pessoas mutualmente conhecidas ou um grupo de cinco pessoas mutualmente estranhas. Esse número n é o Numero de Ramsey $R(4, 5)$.

Há outros meios de estender o problema da festa. No exemplo a seguir nós consideramos o caso onde as pessoas se amam, ou se odeiam, ou são indiferentes entre si. Nessa situação queremos encontrar três pessoas que se amam, ou três pessoas que se odeiam, ou três pessoas que são indiferentes entre si.

Exemplo 2.7. Vamos mostrar que tendo 17 pessoas, podemos encontrar três pessoas que se amam, ou três pessoas que se odeiam, ou três pessoas que são indiferentes entre si.

Vamos considerar as 17 pessoas como vértices de um grafo K_{17} e essa relação por cores. Consequentemente as relações se amam, se odeiam e indiferente entre si, serão representados pelas cores vermelho, azul e amarelo respectivamente. Vamos determinar um vértice do grafo como g,esse vértice será ligados por 16 arestas coloridas. Logo, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos uma cor vai ser utilizada seis vezes. Vamos denotar os seis tais vértices como a, b, c, d, e, f e colorir as arestas que o ligam à g com a cor vermelha (sem perda de generalidade), assim formando um subgrafo G_6[1]. Se houver alguma nova aresta de cor vermelha conectando algum dos seis vértices, existe um triângulo monocromático vermelho e está provado! Se não houver, vamos escolher,sem perda de generalidade, o vértice a. O vértice a está ligado por 5 arestas pretas ou azuis, pelo principio da casa dos pombos, existe uma cor que vai parecer pelo menos três vezes. Sendo assim (sem perda de generalidade), consideremos as 3 arestas azuis, seu vértices são B, C e D. Se existir alguma dessas arestas, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$, com a cor azul, temos um triangulo monocromático azul e está provado. Vamos considerar então que as arestas não serão coloridos com a cor azul. Mas se nenhuma pode ser azul então todas devem ser amarelas, e se todas são amarelas, existe um triangulo preto BCD monocromático.

Este é um exemplo de um número de Ramsey para 3 cores. Mais geralmente, pode-se facilmente generalizar o teorema de Ramsey de duas cores para $r \geq 3$ cores, em qualquer caso o número de Ramsey será denotado por $R(k_1, k_2, \cdots, k_r)$. No caso $k_i = k$ para $i = 1, \cdots, r$, usaremos uma notação

[1]Note que daqui por diante nós conhecemos a solução, ela é a mesma do problema da festa, onde $R(3, 3) = 6$.

simples $R_r(k)$, Então, por exemplo, no problema "amor-ódio-indiferença", nós temos $R(3,3,3) = R_3(3) = 17$.

A existência dos números de Ramsey tem sido conhecida desde 1930. No entanto, existe uma imensa dificuldade em calcular seus valores. Alguns dos valores que são conhecidos $R(3,3) = 6$, $R(3,4) = 9$, $R(3,5) = 14$, $R(3,6) = 18$, $R(3,7) = 23$, $R(3,8) = 28$, $R(3,9) = 36$, $R(4,4) = 18$, $R(4,5) = 25$ e $R(3,3,3) = 17$[6].

2.3 Algumas Notações

Nesta seção introduziremos algumas notações que serão frequentemente utilizadas posteriormente.

Denotaremos, como de costume, o conjunto dos inteiros por $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}^+$. Nosso trabalho principal está restrito apenas ao conjunto dos inteiros. Consequentemente por um "intervalo" queremos dizer um conjunto $\{a, a+1, \cdots b\}$, $a < b$. Denotaremos $[a,b] = \{a, a+1, \cdots b\}$.

Denotaremos algumas vezes por $S = X - Y$ sendo o conjunto dos elementos de X que não estão presentes no conjunto Y. E seja S um conjunto e a um número real, denotaremos $a + S = \{a + s : s \in S\}$ e $aS = \{as : s \in S\}$.

Algumas utilizaremos de números tais como $1, 2, \ldots$ para representar as diferentes cores.

Definição 2.8. Uma coloração r de um conjunto S é uma função $\chi : S \to C$, onde $|C| = r$.

Tipicamente, utilizaremos o conjunto $C = \{0, 1, \cdots, r-1\}$ ou o conjunto $C = \{1, 2, \cdots, r\}$ para trabalhar com r-coloração. Pode-se também pensar em uma r coloração χ de um conjunto S, como uma divisão de S em r subconjuntos $S_1, S_2, \cdots, S_r$, associando o conjunto S_i com o conjunto $\{x \in S : \chi(x) = i\}$.

Definição 2.9. Denotaremos por $m = \max\{s : s \in S\}$ o maior elemento de um conjunto S.

A próxima definição vai ser usada extensivamente.

Definição 2.10. Uma coloração χ é dita monocromática em um conjunto S se χ é constante em S.

Exemplo 2.11. Seja $\chi : [1,5] \to \{0,1\}$ definida por $\chi(1) = \chi(2) = \chi(3) = 1$ e $\chi(4) = \chi(5) = 0$. Então χ é uma coloração 2 de $[1,5]$ que é monocromática em $\{1,2,3\}$ e em $\{4,5\}$.

Frequentemente será conveniente representar 2 colorações particulares de um intervalo como uma sequência de 0's e 1's. Por exemplo, a coloração no Exemplo 2.11 poderia ser representada pela sequência 11100. Mas podemos também abreviar esta coloração, escrevendo na forma $1^3 0^2$. Nós podemos estender essa notação para r colorações com $r \geq 3$ usando sequências com símbolos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, r-1\}$. Por exemplo, podemos definir uma 3-coloração de χ no intervalo $[1,10]$ por $\chi(i) = 0$ para $1 \leq i \leq 5$, $\chi(i) = 1$ para $6 \leq i \leq 9$ e $\chi(10) = 2$. Então podemos escrever $\chi = 0000011112$ ou, de maneira equivalente, $\chi = 0^5 1^4 2$.

2.4 Três Teoremas Clássicos

Surpreendentemente, o teorema de Ramsey não foi o primeiro, nem mesmo o segundo, teorema na área agora conhecida como Teoria de Ramsey. Os resultados que são geralmente aceitos como sendo os primeiros do tipo ”teoremas de Ramsey”são atribuídos, em ordem cronológica, a Hilbert, a Schur, e a Van Der Waerden. Todos esses resultados que precedem o teorema de Ramsey, lida com as colorações em números inteiros. Curiosamente, mesmo pensando que o teorema de Ramsey é um teorema sobre grafos, nós vamos ver que depois pode ser usado dado alguns tipos de resultados de Ramsey sobre os inteiros.

Nesta seção nós introduziremos três teoremas clássicos a respeito do teorema de Ramsey nos inteiros.

Definição 2.12. Um k-termo de uma progressão aritmética é uma sequência de formato $a, a+d, a+2d, ..., a+(k-1)$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^+$.

Nós agora podemos apresentar o teorema de van der Waerden, cujo foi provado em 1927.

Teorema 2.13 (Teorema de van der Waerden)**.** *Para todo inteiro positivo k e r, existe um menor inteiro positivo $w(k;r)$ tal que para toda r-coloração de $[1, w(k;r)]$ existe uma progressão aritmética monocromática de comprimento k.*

Os números $w(k;r)$ são conhecidos como os números de van der Waerden. Observemos um caso simples. Seja $k = r = 2$, queremos encontrar o menor inteiro $w = w(2;2)$, de forma que para qualquer coloração com duas cores de $[1, w] = \{1, 2, \cdots, w\}$ encontremos uma progressão aritmética monocromática com comprimento 2. Considerando a 2-coloração de $\{1, 2\}$ onde 1 e 2 são duas cores distintas. Obviamente, sob uma tal coloração, a progressão $1, 2$ não contém uma progressão aritmética com 2 termos que é monocromática para toda coloração com 2 cores. Verifiquemos agora para toda 2-coloração de $[1, 3]$ se produz uma progressão aritmética monocromática com comprimento 2. Pelo princípio da casa dos pombos, existe uma cor que deve ocorrer ao menos 2 vezes, logo existe para qualquer coloração com 2 cores de $[1, 3]$ uma progressão monocromática de comprimento 2

Para $k \geq 3$, a estimativa destes números rapidamente vai ficando cada vez mais difícil. Alguns dos números de van der Waerden que conhecemos são: $w(3;2) = 9$, $w(3;3) = 27$, $w(3;4) = 76$, $w(4;2) = 35$ e $w(5;2) = 178$. [1]

Os dois principais resultados a seguir, lidam com resultados para equações e sistemas de equações. Vamos denotar por ε uma dada equação ou sistema de equações. Nós vamos chamar de $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ uma solução monocromática onde ε se $x_1, x_2, \cdots, x_k$ são todos da mesma cor e satisfazem ε.

Vamos apresentar um teorema, provado por Issai Schur[2] em 1916, é um dos resultados iniciais na teoria de Ramsey.

Teorema 2.14 (Teorema de Schur)**.** *Para qualquer $r \geq 1$, existe um menor inteiro positivo $s = s(r)$ tal que, para qualquer r-coloração de $[1, s]$, existe uma solução monocromática para $x + y = z$.*

[2]Issai Schur foi um matemático nascido em 1875, na hoje conhecida Bielorrússia. Orientou o doutorado de Richard Rado. Schur Morreu em 1941 aos 66 anos[2].

Demonstração. O teorema de Ramsey afirma, em particular, que para qualquer $r \geq 1$ existe um inteiro $n = R(3;r)$ de forma que para qualquer r-coloração de K_n existe um subgrafo monocromático. Numeremos os vértices de K_n por $1, 2, \cdots, n$. Peguemos os números $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ e coloquemos arbitrariamente em r conjuntos, ou seja, para cada $x \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ atribuiremos uma cor. Peguemos dois vértices j, i de K_n, onde $j, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e $i < j$, e coloriremos as arestas ligadas por este vértice de acordo com o conjunto de que $|j - i|$ é membro. Pelo teorema de Ramsey, um subgrafo K_3 monocromático deve existir. Seja os vértices deste subgrafo monocromático sendo $a < b < c$. Consequentemente, $b - a$, $c - b$ e $c - a$ são todos da mesma cor. Podemos reescrever então que $x = b - a$, $y = c - b$ e $z = c - a$, onde nós notamos que $x + y = z$ é monocromático. □

Definição 2.15. Um triplo $\{x, y, z\}$ que satisfaz $x + y = z$ é chamado um *triplo de Schur.*

Os números $s(r)$ são chamados de números de Schur. Olharemos para caso simples onde determinaremos $s(2)$. Queremos encontrar o menor inteiro positivo s de modo que sempre que $[1, s]$ é colorido com 2 cores vai existir inteiros x, y e z monocromáticos que satisfazem $x + y = z$. Notemos que $s(2)$ deve ser maior que quatro, uma vez que se assumirmos a 2-coloração χ de $[1, 4]$ definida por $\chi(1) = \chi(4) = 0$ e $\chi(2) = \chi(3) = 1$, não encontramos x, y e z com a mesma cor que satisfaça $x + y = z$. Entretanto, toda 2-coloração de $[1, 5]$ produz um tal triplo monocromático,ou seja, $s(2) = 5$. Veremos isso no Exemplo 2.16.

Exemplo 2.16. Vamos mostrar agora que $s(2) \geq 5$. Considere qualquer r-coloração de $[1, 5]$. Sem que haja perda de generalidade, podemos assumir que 1 é colorido de vermelho. Assumiremos, por contradição, que não há um triplo monocromático de Schur. Uma vez que $1 + 1 = 2$, nós devemos colorir o 2 de azul. Uma vez que $2 + 2 = 4$, nós devemos colorir o 4 de vermelho. Uma vez que $1 + 4 = 5$, nós devemos colorir o 5 de azul. Tudo que resta é colorir o 3. No entanto, se 3 é vermelho, então $\{1, 3, 4\}$ é um triplo Schur vermelho e, se 3 é azul, então $\{2, 3, 5\}$ é um triplo Schur azul.

Alguns dos números de Schur conhecidos e são $s(1) = 2$, $s(2) = 5$, $s(3) = 14$ e $s(4) = 45$.[8]

O terceiro e último teorema clássico que nós mencionaremos é o teorema de Rado, uma generalização do teorema de Schur para um sistema de equações lineares. O teorema de Rado pode ser descrito como o seguinte. Pensando no teorema de Schur como um teorema sobre a equação linear homogênea $x + y - z = 0$, consideramos a seguinte questão:

> Qual sistema, $\mathcal{L}$, de equações lineares homogêneas com coeficientes inteiros que tem a seguinte propriedade: para todo $r \geq 1$, existe um menor inteiro positivo $n = n(\mathcal{L}; r)$ tal que para toda r-coloração $[1, n]$ produz uma solução monocromática para $\mathcal{L}$?

Em uma série de artigos publicados na década de 1930, Rado respondeu completamente esta questão. Não nos aprofundaremos muito no estudo de seu teorema, limitando apenas a sua apresentação para um caso particular.

Definiremos primeiro o que é uma equação r-regular.

Definição 2.17. Para $r \geq 1$, uma equação linear ε é chamada r-regular se existe $n = n(\varepsilon; r)$ tal que para toda r-coloração de $[1, n]$ existe uma solução monocromática para ε. Isto é, é chamada *regular* se ela é r-regular para todo $r \geq 1$.

Exemplo 2.18. Usando a Definição 2.17, dizemos que "a equação $x + y = z$ é regular".

Temos o seguinte teorema.

Teorema 2.19 (Teorema de Rado para uma única equação)**.** *Seja ε representada pela equação linear $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$, onde $c_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ para $1 \leq i \leq n$. Então ε é regular, se e apenas se, algum subconjunto não vazio do c_i ter soma igual a zero.*

Exemplo 2.20. A equação $x+y = z$, i.e., $x+y-z = 0$, satisfaz os requisitos do Teorema 2.19. Consequentemente, como notado anteriormente e provado por Schur, $x + y = z$ é regular.

Exemplo 2.21. Decorre do teorema de Rado que a equação $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$ é regular, desde que a soma do primeiro, quarto, e quinto coeficientes é 0.

2.5 Um Pouco Mais de Notação

Apresentados os três teoremas clássicos, podemos notar uma certa similaridade entre eles. De certa forma eles seguem um formato geral, onde existe um número inteiro positivo $n(r)$ de modo que para uma coloração r de $[1, n(r)]$, existe um conjunto monocromático que é pertencente a uma família de conjuntos. Estabeleceremos uma notação que servirá para casos com progressões aritméticas de k-termos que veremos posteriormente.

Seja $\mathcal{F}$ uma determinada família de conjuntos, e sejam k e r inteiros positivos. Se existir o menor inteiro positivo, podemos denotá-lo por $R(\mathcal{F}, k; r)$, de forma que qualquer coloração r de $[1, R(\mathcal{F}, k; r)]$, existe um membro monocromático de $\mathcal{F}$ com o tamanho k. No caso em que esse tal número número inteiro não existe, dizemos que $R(\mathcal{F}, k; r) = \infty$. Muitas vezes nos restringiremos a trabalhar somente com duas cores, visto isto para simplificar sua notação escreveremos a função de $R(\mathcal{F}, k; 2)$ como $R(\mathcal{F}, k)$. Se o comprimento da sequência é compreendido (como o teorema de Schur), nós escreveremos $R(\mathcal{F}; r)$.

Em vez de usar as notações $R(PA, k; r)$ e $R(PA; k)$, usaremos a notação $w(k; r)$ e $w(k)$, respectivamente, onde PA é a família de todas as progressões aritméticas. Por fim, vamos manter a notação $R(k, l)$ definida na Seção2.2 para os números clássicos de Ramsey.

Trabalharemos com algumas coleções, $\mathcal{F}$, de conjuntos inteiros e querendo conhecer se, para um valor especificado de r e um determinado conjunto $M \subseteq \mathbb{Z}$, toda r coloração de M produz um membro monocromático de $\mathcal{F}$, nós temos a seguinte definição.

Definição 2.22. Seja $\mathcal{F}$ ser uma família de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^+$, e seja $r \geq 1$. Se para toda r-coloração de $\mathbb{Z}^+$ e todo $k \geq 1$, existe um membro k-elemento monocromático de $\mathcal{F}$, então nós dizemos que $\mathcal{F}$ é r-*regular*. Se $\mathcal{F}$ é r-regular para todo r, nós dizemos que $\mathcal{F}$ é *regular*.

Algumas vezes vamos substituir a frase "para todo $k \geq 1$, existe um membro k-elemento monocromático de $\mathcal{F}$" por "existe membros arbitrariamente grandes de $\mathcal{F}$".

Exemplo 2.23. Seja $\mathcal{F} = PA$, a coleção de todas progressões aritméticas . Pelo teorema de Van der Waerden, $\mathcal{F}$ é regular, pois cada coloração finita de $\mathbb{Z}^+$, existe, para todo $k \geq 1$, um progressão aritmética monocromática de k termos.

Considerando que a Definição 2.22 é uma propriedade de todas colorações de um conjunto, nós também vamos querer considerar se uma coloração específica de um conjunto M produz um membro monocromático da coleção $\mathcal{F}$. Para isto nós temos a próxima definição.

Definição 2.24. Seja $\mathcal{F}$ ser uma família de subconjuntos de $\mathbb{Z}$ e seja k ser um inteiro positivo. Seja $r \geq 1$, uma r-coloração de um conjunto $M \subseteq \mathbb{Z}$ é chamado $(\mathcal{F}, k; r)$-*válido* se não existe k-elemento monocromático de $\mathcal{F}$ contido em M.

Quando o número de cores é compreendido, nós podemos simplesmente dizer que uma coloração é $(\mathcal{F}, k)$-válido. Se não há nenhuma possibilidade de confusão quanto os significado de $\mathcal{F}$ ou o valor de k, podemos apenas dizer que uma coloração é *válida*.

Note no exemplo, se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos de números pares, colorindo com 2 cores $[1, 10]$, ela pode ser representada pela sequencia binária 1110001110, onde ela é $(\mathcal{F}, 4)$-válida, uma vez que não há nenhuma sequência com 4 termos monocromática que pertence $\mathcal{F}$(i.e. não existem quatro números pares que tenham a mesma cor).

Capítulo 3

Teorema de Van der Waerden

Podemos apontar o teorema de van der Waerden como um dos principais resultados no campo da Teoria de Ramsey. De forma breve, podemos afirmar que seja uma progressão aritmética qualquer, para toda coloração com r cores de $\mathbb{Z}$ se obtêm uma subprogressão monocromática de um certo comprimento.

Analisemos as progressões aritméticas com o comprimento 3. Buscaremos o menor inteiro positivo w de forma que colorindo essa progressão aritmética com duas cores, independentemente da maneira que seja colorido, existirá uma progressão aritmética monocromáticas de comprimento 3. Esse número w, denotado por $w(3; 2)$(ou até mesmo de $w(3)$), é chamado de o número de van der Waerden. Este teorema pode ser descrito através da notação já introduzida como $R(PA, 3; 2)$, onde PA é a família de todas progressões aritméticas. Descreveremos um método para encontrarmos o menor inteiro positivo w tal conseguimos uma progressão aritmética de comprimento 3, bem como qualquer $w(k; r)$, ou qualquer número do tipo Ramsey $R(\mathcal{F}, k; r)$. Para isso procuramos encontrar limitantes inferiores e superiores para os números que desejamos. Vejemos.

> (a) Para estabelecer que um determinado valor v é um limitante inferior para um número específico do tipo Ramsey $R(\mathcal{F}, k; r)$, basta encontrar alguma coloração com r cores de $[1, v-1]$ que não produz nenhum elemento k monocromático que é membro de $\mathcal{F}$.
>
> (b) Para estabelecer que v serve como um limitante superior para $R(\mathcal{F}, k; r)$, é necessário mostrar que toda coloração com r cores de $[1, v]$, produz um elemento k monocromático que é membro de $\mathcal{F}$.

Dito isso, determinaremos que $w = 9$, através do que foi estabelecido acima, provando que $w \geq 9$ e $w \leq 9$

Para mostrarmos (a), onde $w \geq 9$, provaremos que colorindo com 2 cores o intervalo $[1, 8]$ é possível achar uma combinação que evite uma progressão aritmética monocromática de tamanho 3. Isso é fácil, colorindo $1, 4, 5, 8$ com a cor vermelha e colorindo $2, 3, 6, 7$ de azul, nós achamos uma configuração de maneira que essa progressão aritmética monocromática de tamanho 3 não ocorra.

Já para (b), onde $w \leq 9$, suponhamos por absurdo que existe uma configuração onde colorindo $[1, 9]$ com duas cores não seja produzido uma progressão aritmética monocromática de tamanho 3. Vamos utilizar azul e vermelho como as nossas cores, vamos escolher dois números desse intervalo e colori-los com uma cor. Colorimos então 5 e 9 de vermelho. Se pensarmos nos números $(5, 7, 9)$, a única cor possível para 7 é azul. De forma análoga, considerando $(1, 5, 9)$, a única cor possível para 1 também é azul. Para $(1, 4, 7)$, o número 4 pode ser somente colorido de vermelho. Sendo assim, 3 e 6 devem ser coloridos com a cor azul.

Dessa maneira, nos aparece as seguintes configurações

$$\chi_1 = (\text{azul}, \text{vermelho}, \text{vermelho}, \text{azul}, \text{azul})$$

e

$$\chi_2 = (\text{azul}, \text{azul}, \text{vermelho}, \text{vermelho}, \text{azul})$$

como as únicas possibilidades para se colorir $(3, 4, 5, 6, 7)$. Dessa forma, para χ_1, temos $(6, 7, 8)$, onde 8 só pode ser colorido de vermelho. Finalmente, em $(1, 2, 3)$, o número 2 admite apenas a coloração vermelha. Absurdo, pois se 2 é colorido pela cor vermelha, surge uma progressão monocromática $(2, 5, 8)$. E se acontece em χ_1, acontece também em χ_2, uma vez que elas são inversas (simétricas).

De fato, existe $w(3; 2)$ (é um número finito). Com isso, é caracterizado este fato conhecido como teorema finito de van der Waerden. Podemos então apresentá-lo.

3.1 Teorema de Van der Waerden

Vamos então a um dos principais teoremas do tipo-Ramsey.

Teorema 3.1 (Teorema de Van Der Waerden)**.** *Sejam $k, r \geq 2$ inteiros. Existe um menor inteiro positivo $w(k; r)$, para toda r-coloração de $[1, n]$, existe uma progressão aritmética monocromática de comprimento k.*

Vejemos um exemplo onde podemos aplicar o teorema de van der Waerden3.1.

Exemplo 3.2. Sejam a,b,k e r inteiros positivos fixados. Usaremos o teorema de van der Waerden para mostrar que toda coloração com r cores do conjunto $\{a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (w(k; r) - 1)b\}$ admite uma progressão aritmética monocromática de k termos. Seja

$$\chi : \{a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (w(k; r) - 1)b\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$$

uma coloração com r cores. Defina a seguinte coloração

$$\chi' : \{1, 2, \ldots, w(k; r)\} \to \{1, 2, \ldots, r\}$$

$$\chi'(j) = \chi(a + (j - 1)b), \text{ para } 1 \leq j \leq w(k; r).$$

Pelo teorema de van der Waerden existe uma progressão aritmética de comprimento k monocromática essa progressão aritmética monocromática para χ'. Então ela deve existir para χ. Então ela também deve existir para χ'. Isso nos dá uma progressão aritmética monocromática de comprimento k como queríamos.

Observemos agora a existência de progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente longas. E em seguida demonstraremos que isso não cumina em progressões aritméticas monocromáticas de comprimento infinito.

Exemplo 3.3. Vamos considerar a seguinte coloração com duas cores de $\mathbb{Z}^+$:

$$\underbrace{1}_{1}\underbrace{00}_{2}\underbrace{1111}_{4}\underbrace{00\ldots0}_{8}\underbrace{11\ldots1}_{16}00\ldots,$$

i.e., para $j \geq 0$, $I_j = [2^j, 2^{j+1} - 1]$ é colorido de:
1 se j é par;
0 se j é impar.
Para qualquer k existe uma progressão aritmética monocromática de comprimento k. Essa coloração produz progressões aritméticas monocromáticas longas.

Não existem progressões aritméticas monocromáticas infinitamente longas. Podemos observar isto no seguinte caso. Seja $A = \{a, a+p, a+2p, \ldots\}$, onde $a, p \in \mathbb{Z}$, uma progressão aritmética infinitamente longa e suponhamos por absurdo que existem progressões aritméticas monocromáticas infinitamente longas. Vamos mostrar que existe n tal que $2^n > p$ e $A \cap I_n \neq \emptyset$. Suponhamos por absurdo que não exista elemento de A em I_n, ou seja, o intervalo de $I_n = [2^n, 2^{n+1} - 1] \cap A = \emptyset$. Dessa forma temos que $a + pk$ seria o menor número, tal que $a + pk < 2^n$ e que $a + p(k+1)$ seria o próximo elemento, tal que $a + p(k+1) > 2^{n+1} - 1$. Se somarmos as duas inequações temos:

$$\begin{aligned} a + pk + 2^{n+1} - 1 &< 2^n + a + p(k+1) \\ pk - p(k+1) &< 2^n - 2^{n+1} + 1 \\ p(k - k - 1) &< 2^n(1-2) + 1 \\ p &> 2^n - 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Absurdo! Não existe $p \in \mathbb{Z}$, tal que $2^n > p > 2^n - 1$. Então existe n tal que $2^n > d$ e $A \cap I_n \neq \emptyset$. Consequentemente $A \cap I_{n+1} \neq \emptyset$ também é verdade. Contudo, se a coloração de I_n é diferente da coloração de I_{n+1}, então A não é monocromático.

Sabendo a existência e o que são progressões aritméticas monocromáticas longas, podemos falar um pouco sobre: *O Princípio da Compacidade.*

3.2 O Princípio da Compacidade

O princípio da compacidade, ou princípio da seleção de Rado, de forma bem simplória nos diz:

Tendo uma declaração "infinita"do tipo-Ramsey desde que ela seja verdadeira, podemos ter uma correspondente "finita". Utilizaremos aqui uma versão simples deste princípio, uma vez que não é um assunto tão relevante para este trabalho. Um exemplo disso, podemos firmar uma versão "finita"do teorema de van der Waerden para duas cores:

> Para todo $k \geq 2$, existe um menor inteiro $n = w(k)$, tal que para toda coloração com 2 cores de $[1, m]$, $m \geq n$, existe um progressão aritmética monocromática com k termos,

a partir da versão "infinita":

> Para toda coloração com 2 cores de $\mathbb{Z}^+$, existe, para todo $k \geq 2$, progressões aritméticas monocromáticas com k termos.

Dizer também, que cada coloração com 2 cores de $\mathbb{Z}^+$ admite arbitrariamente progressões aritméticas monocromáticas longas é uma forma de expressar a versão "infinita"citada acima do teorema de van der Waerden para duas cores.

O princípio da compacidade não nos fornece nenhum limitante sobre o valor mínimo na versão "finita", apenas nos permite conhecer a sua existência. Dito isso, vamos ao teorema.

Teorema 3.4 (O Princípio da Compacidade)**.** *Seja $r \geq 2$ e seja $\mathcal{F}$ sendo a família dos subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^+$. Assumimos que para toda coloração com r cores de $\mathbb{Z}^+$ existe um membro monocromático de $\mathcal{F}$. Então existe um menor inteiro positivo $n = n(\mathcal{F}; r)$ tal que, para toda coloração r de $[1, n]$, existe um membro monocromático de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que para cada $n \geq 1$ existe uma r-coloração sem nenhum membro monocromático de $\mathcal{F}$. Ela será definida por

$$\chi_n : [1, n] \to \{1, 2, \ldots, r\}$$

Teremos então que para $\chi_1(1), \chi_2(1), \chi_3(1), \ldots$ existe um cor de $\chi(1)$ que ocorre um número infinito de vezes, chamaremos essa cor de c_1, onde $\chi_j(1) = c_1$. Então teremos $\mathcal{T}_1$ como sendo a coleção de todos $\{\chi_j : \chi_j(1) = c_1\}$. Olhando agora para os $\chi(2)$, notemos que novamente há uma cor que ocorre um número infinito de vezes onde $\chi_j(2) = c_2$. Logo, $\mathcal{T}_2 = \{\chi_j \in \mathcal{T}_1 : \chi_j(2) = c_2\}$. Podemos continuar esse processo infinitas vezes, para qualquer $i \geq 2$, onde

$$\mathcal{T}_i = \{\chi_j \in \mathcal{T}_{i-1} : \chi_j(i) = c_i\}$$

Definimos que $\chi(i) = c_i$. A coloração resultante de $\chi : \mathbb{Z}^+ \to \{1, 2, \ldots, r\}$, tem a propriedade de produzir para $g \geq 1$, $\mathcal{T}_g$ é a coleção de colorações χ_i com $\chi(x) = \chi_i(x)$ onde $x = 1, 2, \ldots, g$. Existe um conjunto finito S em $\mathcal{F}$ que é monocromático, peguemos então um $m = \max\{s : s \in S\}$. Para todo $\chi_\ell \in \mathcal{T}_m$ temos $\chi_\ell = \chi_\ell(x)$, onde decorre que para todo x no S o χ_ℓ é monocromático. E isso é um absurdo, uma vez que admitimos que todos os χ's não produziam nenhum membro monocromático. □

É trivial que se $m > n$, dado χ ser uma r-coloração de $[1, n]$, ele deve produzir um membro monocromático de uma família $\mathcal{F}$. Se nosso m é uma extensão de n, evidentemente ele produz também um membro monocromático sob χ dessa família $\mathcal{F}$.

3.3 Formas Alternativas do Teorema de Van der Waerden

Apresentaremos agora mais alguns teoremas que são formas equivalentes dos teorema de van der Waerden aqui apresentados, tanto de sua forma "finita"quanto da sua forma "infinita".

Teorema 3.5. *Os seguintes teoremas são equivalentes:*

(i) Para $k \leq 2$, qualquer coloração com duas cores dos $\mathbb{Z}^+$ admite uma progressão aritmética monocromática de comprimento k.

(ii) Para $k \leq 2$, $w(k;2)$ existe.

(iii) Para $k, r \leq 2$, $w(k;r)$ existe.

(iv) Seja $r \leq 2$. Para qualquer r-coloração de $\mathbb{Z}^+$ e qualquer subconjunto finito $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subseteq \mathbb{Z}^+$, existem inteiros $a, d \leq 1$ tal que $a + dS = \{a + s_1 d, a + s_2 d, \ldots, a + s_n d\}$ é monocromático.

(v) Para $k, r \leq 2$, qualquer r-coloração de $\mathbb{Z}^+$ admite uma progressão aritmética monocromática de comprimento k.

(vi) Para $k \leq 2$, qualquer conjunto infinito de inteiros positivos, $S = \{s_i\}_{i \leq 0}$, para o qual $c = \max\{|s_{i+1} - s_i| : i \leq 0\}$ existe, deve conter uma progressão aritmética de comprimento k.

Apresentado algumas formas do teorema de van der Waerden, vejamos como é feito sua demonstração.

3.4 Prova do Teorema de van der Waerden

Podemos agora finalmente provar a versão finita do teorema de van der Waerden. Relembremos o que diz o teorema.

Teorema de van der Waerden. *Sejam $k, r \geq 2$ inteiros. Existe um menor inteiro positivo $w(k;r)$ tal que para toda r-coloração de $[1, n]$ existe uma progressão aritmética monocromática de comprimento k.*

Para provarmos o teorema de van der Warden necessitaremos de alguns artifícios ainda não apresentados. Apresentaremos a frente dois lemas que serão fundamentais para a construção da prova desse teorema.

Introduziremos duas proposições importantes para compreensão desses lemas. Elas soarão familiar, pois são propriedades já vistas em alguns exemplos presentes neste relatório. Verificamos isso ao observar que a Proposição3.6 já foi utilizada no Exemplo 3.2.

Proposição 3.6. *Sejam k, r, m, a, e b serem inteiros positivos. Toda r-coloração de $[1, m]$ produz uma progressão aritmética monocromática com k termos se e somente se toda r-coloração de*

$$S = \{a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (m-1)b\}$$

produzir uma progressão aritmética monocromática de comprimento k.

Proposição 3.7. *Seja $\mathcal{F}$ ser a coleção de conjuntos e seja $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Assumimos o seguinte: $S \in \mathcal{F}$ se e somente se $a + bS \in \mathcal{F}$. Seja $r \in \mathbb{Z}^+$. Então toda r-coloração de $[1, n]$ produz um membro monocromático de $\mathcal{F}$ se e somente se toda r-coloração de*

$$a + b[0, n-1] = \{a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (n-1)b\}$$

produz um membro monocromático de $\mathcal{F}$.

Definição 3.8. Sejam $r, m, n \geq 1$ e γ ser uma r-coloração de $[1, n+m]$. Definimos $\chi_{\gamma,m}$ ser a r^m-coloração de $[1, n]$ do seguinte modo: seja $j \in [1, n]$ e seja $\chi_{\gamma,m}(j)$ ser o m-upla[1] $(\gamma(j+1), \gamma(j+2), \ldots, \gamma(j+m))$. Nós chamamos $\chi_{\gamma,m}$ uma coloração derivada de γ, ou uma *coloração derivada*.

Exemplo 3.9. Tomemos $r = 2$, $m = 3$ e $n = 10$ na Definição3.8. Define $\gamma : [1, 13] \to 0, 1$ pela coloração.

$$0110001110000$$

Para descrever a 2^3-coloração $\chi_{\gamma,3}$ de $[1, 10]$ derivada de γ, fizemos a seguinte correspondência entre o conjunto de todas 3-uplas de duas cores, $T = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{0, 1\}\}$.

$$\begin{array}{ll}
(0,0,0) \leftrightarrow 0; & (1,0,0) \leftrightarrow 1; \\
(0,1,0) \leftrightarrow 2; & (0,0,1) \leftrightarrow 3; \\
(0,1,1) \leftrightarrow 4; & (1,1,0) \leftrightarrow 5; \\
(1,0,1) \leftrightarrow 6; & (1,1,1) \leftrightarrow 7;
\end{array}$$

Pela Definição3.8 vamos construir essa $\chi_{\gamma,3}(j)$, para $1 \leq j \leq 10$. Vejamos essa coloração derivada então:

$$\begin{array}{rcl}
\chi_{\gamma,3}(1), & (\gamma(2), \gamma(3), \gamma(4)) & = (1,1,0) \leftrightarrow 5; \\
\chi_{\gamma,3}(2), & (\gamma(3), \gamma(4), \gamma(5)) & = (1,0,0) \leftrightarrow 1; \\
\chi_{\gamma,3}(3), & (\gamma(4), \gamma(5), \gamma(6)) & = (0,0,0) \leftrightarrow 0; \\
\chi_{\gamma,3}(4), & (\gamma(5), \gamma(6), \gamma(7)) & = (0,0,1) \leftrightarrow 3; \\
\chi_{\gamma,3}(5), & (\gamma(6), \gamma(7), \gamma(8)) & = (1,1,0) \leftrightarrow 5; \\
\chi_{\gamma,3}(6), & (\gamma(7), \gamma(8), \gamma(9)) & = (0,1,1) \leftrightarrow 4; \\
\chi_{\gamma,3}(7), & (\gamma(8), \gamma(9), \gamma(10)) & = (1,1,1) \leftrightarrow 7; \\
\chi_{\gamma,3}(8), & (\gamma(9), \gamma(10), \gamma(11)) & = (1,1,1) \leftrightarrow 7; \\
\chi_{\gamma,3}(9), & (\gamma(10), \gamma(11), \gamma(12)) & = (1,1,0) \leftrightarrow 5; \\
\chi_{\gamma,3}(10), & (\gamma(11), \gamma(12), \gamma(13)) & = (0,0,0) \leftrightarrow 0;
\end{array}$$

Encontramos a coloração derivada sob $\chi_{\gamma,3}$

$$5103547750$$

Definição 3.10. Dizemos que um triplo $(k, t; r)$ é *refinado* se existe inteiro positivo $m = m(k, t; r)$ tal que toda r-coloração de $[1, m]$, existem inteiros positivos $z, x_0, x_1, \ldots, x_t$ de modo que cada um dos conjuntos

$$T_s = \{b_s + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x_i : c_i \in [1, k]\},$$

$0 \leq s \leq t$, é monocromático, onde

$$b_s = z + (k+1) \sum_{i=s}^{t} x_i.$$

[1] Uma sequência finita de objetos

Lema 3.11. *Seja $k \geq 1$. Se $w(k;r)$ existe para todo $r \geq 1$, então $(k,t;r)$ é refinado para todo $r,t \geq 1$.*

Demonstração. Vamos provar esse lema através do método de indução em $t = 1$, assim provando que $(k,1;r)$ é *refinado.* Nós devemos tomar $m = m(k,t;r)$. Nós iremos assumir que $w(k;r)$ existe e iremos aplicar a Proposição 3.6 sob o intervalo $[1, w(k;r)]$, obtendo assim o intervalo que $[w(k;r)+k+2, 2w(k;r)+k+1]$ que admite uma progressão aritmética monocromática com k termos $S = \{a+d, a+2d, \ldots, a+kd\}$.

Tomemos $z = a-(k+1)$, $x_0 = d$ e $x_1 = 1$. Se aplicarmos a Definição3.10, temos que:

$$T_0 = \{a+(k+1)d\}$$

e

$$T_1 = \{a+d, a+2d, \ldots, a+kd\}$$

onde ambos estão contidos em $[1,m]$ e são monocromáticos individualmente, assim provando que $(k,1;r)$ é um triplo *refinado.*

Agora seja $t \geq 1$ e assuma que $(k,t;r)$ é refinado. Nós vamos mostra que $(k,t+1;r)$ também é refinado. Tomemos então $m(k,t+1,r) = n+m$ e $n = 2w(k;r^m)$.

Seja γ ser uma r-coloração de $[1,n+m]$. Seja $\chi = \chi_{\gamma,m}$ ser a r^m-coloração de $[1,n]$ derivada de γ. Pela definição de n, desde que exista $w(k;r^r)$, deve existir uma progressão aritmética

$$\{a+d, a+2d, \ldots, a+kd\} \subseteq [1,n]$$

com k termos monocromática sob $\chi_{\gamma,m}$. Pela definição de χ, os k intervalos $I_j = [a+jd+1, a+jd+m]$, para $1 \leq j \leq k$, tem as mesmas cores sob γ. Se $(k,t;r)$ é refinado, existe $z, x_0, x_1, \ldots, x_t$ de forma que os T_i's são monocromáticos sob γ. Logo, temos para cada I_j contendo os conjuntos monocromáticos

$$\begin{aligned} S_s(j) &= T_s + (a+jd) \\ S_s(j) &= \{b_s + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x_i : c_i \in [1,k] + (a+jd)\} \\ S_s(j) &= \{b_s + a + jd) + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x_i : c_i \in [1,k]\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

para $s = 0,1,\ldots,t$ e $b_s = z+(k+1)\sum_{i=s}^{t} x_i$ pela Definição3.10. Desde que os intervalos tenham a mesma cor sob γ , temos para $S_s(u)$ e $S_s(v)$ com a mesma cor sob γ para $1 \leq u,v \leq k$. Temos, por construção, o seguinte conjunto monocromático sob γ

$$\mathcal{S}_s = \{b_s + a) + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x_i + jd : j, c_i \in [1,k]\} \text{ para } s = 0,1,\ldots,t.$$

Vamos produzir conjuntos monocromáticos T_s's, para isso devemos definir alguns valores para $z', x'_0, x'_1, \ldots, x'_{t+1}$, para $s = 0,1,\ldots,t+1$, mostrando assim que $(k, t+1; r)$ é refinado. Tomemos

$$\begin{aligned} z' &= z + a, \\ x'_i &= x_i \text{ para } 0 \leq i \leq s-1, \\ x'_i &= d, \\ x'_i &= x_i \text{ para } s+1 \leq i \leq t, \text{ e} \\ x'_{t+1} &= x_s. \end{aligned}$$

Onde segue que para cada $s = 0, 1, \ldots, t$ nós temos

$$\begin{aligned} T'_{s+1} &= \{z' + (k+1)\sum_{i=v}^{r} x'_i + \sum_{i=0}^{s} c_i x'_i : c_i \in [1,k]\} \\ T'_{s+1} &= \{(b_s + a) + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x'_i + \sum_{i=s}^{s} c_i x'_i : c_i \in [1,k]\} \quad (3.3) \\ \mathcal{S}_s = T'_{s+1} &= \{(b_s + a) + \sum_{i=0}^{s-1} c_i x'_i + jd : j, c_i \in [1,k]\} \end{aligned}$$

é monocromático o sob γ para $0 \leq s \leq t$. Uma vez que T'_0 tem apenas um único ponto, ele também deve ser monocromático. Então nós satisfazemos as condições para provar que $(k, t+1; r)$ é refinado, provando assim o lema. □

Lema 3.12. *Se $(k, t; r)$ é refinado para todo $r, t \geq 1$, então $w(k+1; r)$ existe para todo $r \geq 1$.*

Demonstração. Comecemos pegando um r e pensemos em χ sendo qualquer r-coloração dos $\mathbb{Z}^+$. Por suposição, $(k, t; r)$ é refinado para $r = t$. Então temos por Definição 3.10 que $z, x_0, x_1, \ldots, x_r$ tal que cada um dos conjuntos $T_0, T_1, \ldots, T_r$ seja monocromático sob χ. Temos então pelo princípio da casa dos pombos que dois desses conjuntos tem a mesma cor, uma vez que que existe um número r de cores e um número $r+1$ de conjuntos. Peguemos T_v e T_w, $v < w \leq r$, que são coloridos por uma mesma cor. Temos então

$$T_v = \left\{ z + (k+1)\sum_{i=v}^{r} x_i + \sum_{i=0}^{v-1} c_i x_i : c_i \in [1,k] \right\}$$

e

$$T_w = \left\{ z + (k+1)\sum_{i=w}^{r} x_i + \sum_{i=0}^{w-1} c_i x_i : c_i \in [1,k] \right\}.$$

Assumiremos que $z = a - \sum_{i=0}^{v-1} x_i - (k+1)\sum_{i=w}^{r} x_i$, sendo assim podemos reescrever T_v e T_w como

$$\begin{aligned} T_v &= \left\{ a - \sum_{i=0}^{v-1} x_i - (k+1)\sum_{i=w}^{r} x_i + (k+1)\sum_{i=v}^{r} x_i + \sum_{i=0}^{v-1} c_i x_i : c_i \in [1,k] \right\} \\ T_v &= \left\{ a + (k+1)(\sum_{i=v}^{r} x_i - \sum_{i=w}^{r} x_i) + \sum_{i=0}^{v-1} (c_i - 1) x_i : c_i \in [1,k] \right\} \\ T_v &= \left\{ a + (k+1)\sum_{i=v}^{w-1} x_i + \sum_{i=0}^{v-1} (c_i - 1) x_i : c_i \in [1,k] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$T_w = \left\{ a - \sum_{i=0}^{v-1} x_i - (k+1) \sum_{i=w}^{r} x_i + (k+1) \sum_{i=w}^{r} x_i + \sum_{i=0}^{w-1} c_i x_i : c_i \in [1,k] \right\}$$
$$T_w = \left\{ a - \sum_{i=0}^{v-1} x_i + \sum_{i=0}^{w-1} c_i x_i : c_i \in [1,k] \right\} \tag{3.5}$$

Tomemos $c_0 = c_1 = \ldots = c_{v-1} = 1$ em T_w, obtemos então

$$T'_w = \left\{ a + \sum_{i=0}^{w-1} c_i x_i : c_i \in [1,k] \right\} \subseteq T_w.$$

Seja $d = \sum_{i=0}^{w-1} x_i$. Nós temos $T_v = \{a + (k+1)d\}$, ou seja, $a + (k+1)d \in T_v$ e observe que também $\{a+d, a+2d, \ldots, a+kd\} \subseteq T'_w$. Logo, podemos encontrar uma progressão aritmética de comprimento $k+1$, provando assim a existência de $w(k+1;r)$. □

Finalmente podemos provar teorema de van der Waerden. Coloquemos então os teoremas juntos.

Prova do teorema de van der Waerden. Sabemos que $w(1;r)$ existe para todo $r \geq 1$, uma vez que só precisamos de um único ponto. O Lema3.11 nos mostra que $(1,t;r)$ é refinado para todo $r,t \geq 1$. Aplicando agora o Lema3.12 temos a existência de $w(2;r)$ para todo $r \geq 1$. Podemos prosseguir esse processo de aplicação dos lemas3.11 e 3.12 obtendo assim a existência de $w(k;r)$ para qualquer comprimento k dado e para todo $r \geq 1$. E está provado. □

Referências Bibliográficas

[1] P. R. Herwig, M. J. Heule, P. M. van Lambalgen, and H. van Maaren. A new method to construct lower bounds for van der waerden numbers. *the electronic journal of combinatorics*, 14(1):R6, 2007.

[2] A. Joseph, A. Melnikov, and R. Rentschler. *Studies in memory of Issai Schur*, volume 210. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] B. Landman and A. Robertson. *Ramsey Theory on the Integers*. Student mathematical library. American Mathematical Society, 2004.

[4] N. Muniz. Ac tópicos de matemática elementar: combinatória. *Rio de Janeiro: SBM*, 2012.

[5] D. R. Pansera and E. Valmórbida. O princípio da casa dos pombos e suas aplicações.

[6] S. P. Radziszowski et al. Small ramsey numbers. *Electron. J. Combin*, 1(7), 1994.

[7] F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-30(1):264–286, 1930.

[8] A. Robertson. Difference ramsey numbers and issai numbers. *Advances in Applied Mathematics*, 25(2):153–162, 2000.

[9] A. Soifer. *Ramsey Theory: Yesterday, today, and tomorrow.* Springer Science & Business Media, 2010.