Questões	Valores	Notas
$1.^a$	2.5	
$2.^a$	2.5	
$3.^a$	2.5	
$4.^a$	2.5	
$5.^a$	2.0	
Total	12.0	

Prova 3 de MA- 327– Álgebra Linear - Turmas A e B

$2.^o$ semestre de 2017 – 30/11/2017

Nome:______________________________

RA:______________________________

Turma:______________________________

$1.^a$ Questão.

a) Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno definido por

$$\left\langle a_1 + b_1 t + c_1 t^2, a_2 + b_2 t + c_2 t^2 \right\rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

seja $W = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(0) - p'(0) = 0\}$. Determine uma base para W e uma base para seu complemento ortogonal $W^{\perp}$. (1.25)

b) No espaço das funções reais contínuas definidas no intervalor $[1,3]$, $C[1,3]$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_1^3 f(t)g(t)dt$, tome a função $h(t) = 1/t$. Mostre que a função constante mais próxima de $h(t)$ é dada por $g(t) = \frac{1}{2}\log 3$. Calcule a distância entre g e h. (1.25)

Solução:

a) Observe que

$$\begin{aligned} W =& \{p(t) = a + bt + ct^2 : p(0) - p'(0) = 0\} = \{p(t) = a + bt + ct^2 : a - b = 0\} \\ =& \{a + at + ct^2 : a, c \in \mathbb{R}\} = \{a(1+t) + ct^2 : a, c \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{1+t, t^2\}. \end{aligned}$$

Logo uma base para W é $\beta = \{1+x, x^2\}$. Agora, sabemos que $p(t) = a + bt + ct^2 \in W^{\perp}$ se, e somente se, u é ortogonal a cada vetor de β. Logo $p(t) \in W^{\perp}$ se, e somente se,

$$< a + bt + ct^2, 1 + t >= 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

e

$$< a + bt + ct^2, t^2 >= 0 \Rightarrow c = 0.$$

Portanto, $W^{\perp} = \{a - at : a \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{1 - t\}$. Assim uma base para $W^{\perp}$ é $\{1 - t\}$

b) Seja U o subespaço de $C[1,3]$ formado pelas funções constantes, por um teorema sabemos que o ponto de U mais próximo de $h(t)$ é a projeção ortogonal de $h(t)$ sobre U. Precisamos então calcular essa projeção. Seja $P : C[1,3] \to U$ a projeção ortogonal sobre U. Observe que U tem dimensão 1 pois quaisquer suas constantes são múltiplas uma da outra. Seja $c(t) = c \in U$ uma constante, temos

$$< c, c >= \int_1^3 c^2 dt = 2c^2.$$

Assim, a função constante igual a $1/\sqrt{2}$ é uma base ortonormal para U. Logo,

$$P(f) =< f(t), 1/\sqrt{2} > \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Em particular,

$$P(h) =< h(t), 1/\sqrt{2} > \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log t|_1^3 = \frac{1}{2}\log 3,$$

concluindo o que queríamos demonstrar.

A distância entre h e $\frac{1}{2}\log 3$ é dada por:

$$||h(t) - \frac{1}{2}\log 3|| = \sqrt{< 1/t - \frac{1}{2}\log 3, 1/t - \frac{1}{2}\log 3 >} = \left(\int_1^3 \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\log 3 + \frac{1}{4}(\log 3)^2 dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(\log 3)^2\right)^{1/2}$$

2.^{a} Questão. Seja $V = C^2[0,1]$ o espaço das funções reais diferenciáveis e com derivada diferenciável e segunda derivada contínua, munido com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Considere o subespaço $W = \{f(t) \in V : f(0) = f(1) = 0\}$ e o operador $T : W \longrightarrow V$ definido por

$$T(f)(t) = f''(t).$$

Mostre que T é simétrico.

Solução: Sejam $f, g \in W$ quaisquer vamos demonstrar que $< T(f), g >=< f, T(g) >$. Sabemos que

$$< T(f), g >=< f'', g >= \int_0^1 f''(t)g(t)dt.$$

Considerando $u = g(t)$ e $v = f'(t)$ temos $dv = f''(t)dt$ e $du = g'(t)dt$ assim, pelo teorema de integração por partes, temos

$$\int_0^1 f''(t)g(t)dt = f'(t)g(t)|_0^1 - \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = f'(1)g(1) - f'(0)g(0) - \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$
$$= -\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

pois $g(0) = g(1) = 0$. Assim,

$$< T(f), g >= -\int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

Analogamente,

$$< f, T(g) >=< f, g'' >= \int_0^1 f(t)g''(t)dt.$$

Usando integração por partes com $u = f(t)$ e $v = g'(t)$ temos

$$< f, T(g) >= f(t)g'(t)|_0^1 - \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = -\int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

Portanto $< T(f), g >=< f, T(g) >$ para quaisquer $f, g \in W$ o que implica que T é simétrica.

3.^{a} Questão.

1) (1.0) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazendo $ac > b^2$ e $a > -c$. Mostre que A é positiva definida.

2) (0.5) Determine se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}$ é positiva definida.

3) (1.0) Determine se a matriz $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ é unitária.

Solução: Nos itens (1) e (2) utilizaremos o teorema que afirma que uma matriz com entradas reais é positiva definida se, e somente se, é simétrica e todos os seus autovalores são positivos.

1) Observe que A é claramente simétrica. Vamos calcular seus autovalores. O polinômio característico de A é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2).$$

Assim as raízes são

$$\lambda_1 = \frac{a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2}.$$

Como $ac > b^2$ então $(a + c)^2 - 4(ac - b^2) < (a + c)^2$, o que implica

$$0 < \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)} < a + c$$

$$\Rightarrow 0 < a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)} < a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}.$$

Assim, temos

$$\lambda_1 > \lambda_2 = \frac{a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} > 0.$$

Ou seja, ambas as raízes são positivas e, portanto, a matriz A é positiva definida.

2) Sejam $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$ polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = p_B(\lambda)p_C(\lambda)$$

onde $p_B(\lambda)$ é o polinômio característico de B e $p_C(\lambda)$ é o polinômio característico de C. Observe que B e C são matrizes satisfazendo as condições do item (1), portanto, B e C são positivas definida. Ou seja, as raízes de $p_B(\lambda)$ e $p_C(\lambda)$ são positivas. Consequentemente as raízes de $p(\lambda)$ são todas positivas. Assim, uma vez que A é simétrica segue que A é positiva deifnida.

3) Seja $< u, v >= \overline{v}^t u$ o produto interno usual em C^3 considere os vetores coluna da matriz A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$< v_1, v_1 >=< v_2, v_2 >=< v_3, v_3 >= 1$$

e que

$$< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_3, v_1 >= 0.$$

Portanto, as colunas formam uma base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ donde segue que A é unitária.

Outra forma de se fazer seria simplesmente fazer o produto $\overline{A}^t \cdot A$ e verificar que esse produto é igual a I.

4.^{a} Questão. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz qualquer. Mostre que

1) (1.75) $\overline{A}^t \cdot A - A \cdot \overline{A}^t$ é uma matriz diagonalizável
2) (0.75) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A contados com multiplicidade.

Solução:

1) Por um teorema sabemos que toda matriz hermitiana é diagonalizável. Assim, basta mostrar que a matriz B definida por $B = \overline{A}^t \cdot A - A \cdot \overline{A}^t$ é diagonalizável. Observe que

$$\overline{B}^t = (\overline{\overline{A}^t \cdot A - A \cdot \overline{A}^t})^t = (A^t \cdot \overline{A} - \overline{A} \cdot A^t)^t = (A^t \cdot \overline{A})^t - (\overline{A} \cdot A^t)^t = \overline{A}^t \cdot A - A \cdot \overline{A}^t = B.$$

Logo B é hermitiana e, portanto, diagonalizável como queríamos demonstrar.

2) Seja J a forma canônica de Jordan da matriz A, existe uma matriz invertível P tal que $A = P^{-1} \cdot J \cdot P$. Em particular,

$$\det(A) = \det(P^{-1}JP) = \det(P)^{-1} \det(J) \det(P) = \det(J).$$

Agora lembremos que a forma canônica de Jordan J de A é uma matriz triangular inferior com os autovalores de A, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, contados com multiplicidade, na sua diagonal principal. Assim,

$$\det(J) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

Portanto,

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

como queríamos demonstrar.

5.^{a} Questão. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encontre a forma canônica de Jordan de A. (1.25)
b) Encontre A^{39}. (0.75)

Solução: O polinômio característico de A é dado por

$$p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2$$

logo os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

Como $\lambda_1 = 0$ é uma raiz simples de $p(\lambda)$ e mult. geom $\leq$ mult. alg $= 1$, então a forma canônica de Jordan J de A deve ter apenas um bloco relativamente a λ_1 e este bloco deve ter tamanho 1, ou seja, o bloco é da forma (0).

Para $\lambda_2 = 1$ a quantidade de blocos é dada pela multiplicidade geométrica $\dim \operatorname{Ker}(A - I)$. Vamos calcular tal dimensão. Seja $v = (xyz)^t \in \operatorname{Ker}(A - I)$ então:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x - y + z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, \quad y = z.$$

Assim, $\operatorname{Ker}(A - I) = \{(0, y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(0, 1, 1)\}$ o que implica $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 1$. Assim, há um único bloco associado a $\lambda_2 = 1$ e que, portanto, deve ter tamanho 2. Assim

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Seja $A = P^{-1}JP$ então $A^{39} = P^{-1}J^{39}P$. Sabemos que

$$J^{39} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{39} & 0 \\ 0 & 39 \cdot 1^{38} & 1^{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 39 & 1 \end{pmatrix}$$

portanto basta calcular P e fazer a multiplicação. Seja $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base tal que $J = [A]_\gamma^\gamma$ então temos as seguintes relações:

$$Av_1 = 0, \quad Av_2 = v_2 + v_3, \quad Av_3 = v_3.$$

Precisamos encontrar uma base satisfazendo essas relações. Observe que no item (a) já encontramos um autovetor associado ao autovalor 1, assim, podemos tomá-lo como sendo v_3, isto é: tome

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos encontrar um vetor v_1 (não nulo) satisfazendo $Av_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + z \\ x + z \end{pmatrix} \Rightarrow x = z = 0.$$

Então podemos tomar

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente v_2 deve satisfazer $(A-I)v_2 = v_3$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x-y+z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1, \quad z = y-1.$$

Assim podemos tomar

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ é de fato uma base de $\mathbb{R}^3$. Assim, como $P = [I]_\gamma^\beta$ (onde β é a base canônica) temos

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$A^{39} = P^{-1} J^{39} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 39 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 1 \\ 39 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Boa Prova!