MA 327 - Turmas A e B - Revisão P3

Profs. Gabriel Ponce & João Paulo Pitelli
IMECC- UNICAMP

Complemento ortogonal

Problema 1. Seja S um subespaço de um espaço vetorial V, defina o que é o complemento ortogonal $S^{\perp}$.

Problema 2. Seja V um espaço vetorial com produto interno e $W \subset V$ um subespaço vetorial. Seja $\{w_1, \ldots, w_n\}$ uma base de W mostre que:

$$u \in W^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad < u, w_i >= 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

O resultado obtido no problema 2 é muito importante e muito útil e pode ser utilizado, dentre outras coisas, para obter bases ortogonais de um espaço contendo uma base de um subsespaço dado.

Problema 3. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e seja $S = \{(x, y, z) : (x + 2y)^2 + (z - x)^2 = 0\}$.

a) Determine $S^{\perp}$.

b) Encontre uma base ortogonal de $S^{\perp}$.

c) Encontre uma base de V contendo uma base de S.

Problema 4.[Teorema da decomposição ortogonal] Seja V um espaço vetorial com produto interno $< \cdot, \cdot >$ e S um subespaço de V com dimensão finita, mostre que

$$V = S \oplus S^{\perp}.$$

Conclua que $\dim(V) = \dim(S) + \dim(S^{\perp})$.

Problema 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e sejam S, W subespaços vetoriais de V com dimensões m e k respectivamente. Supondo que $S^{\perp} \cup W^{\perp} = V$ determine $\dim(S^{\perp} \cap U^{\perp})$.

Operadores e matrizes especiais

No que segue, sempre que o produto interno não for mencionado deve-se trabalhar com o produto interno usual.

Problema 5. Defina:

a) Operador simétrico e anti-simétrico;

b) Operador hermitiano e anti-hermitiano;

c) Operador ortogonal e operador unitário;

d) Isometria.

Problema 6. Seja $T : V \to V$ um operador linear definido em um espaço vetorial real V munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$, mostre que T é ortogonal se, e somente se, T é uma isometria.

Problema 7. Verdadeiro ou falso (se verdadeiro demonstre , se falso apresente um contra-exemplo)

( ) Seja V um espaço vetorial real com base ortonormal $\{v_1, v_2, \cdot, v_n\}$ e munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Então T é uma isometria se, e somente se, para cada $1 \leq i \leq n$ temos:

$$< T(v_i), T(v_i) >=< v_i, v_i > .$$

( ) Seja V um espaço vetorial com base ortonormal $\{v_1, v_2, \cdot, v_n\}$ e munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Então T é uma isometria se, e somente se, $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal de $\mathrm{Im}(T)$.

( ) Um operador linear T é ortogonal se, e somente se, T leva bases ortonormais em bases ortonormais.

( ) Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se, e somente se, suas colunas formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

( ) Seja V um espaço vetorial complexo com base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \cdot, v_n\}$ e munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Se uma transformação linear $T : V \to V$ é hermitiana então $[T]_\beta^\beta$ é hermitiana.

Problema 8. Classifique as seguintes transformações lineares (ou seja, diga se cada uma delas é: simétrica, anti-simétrica, hermitiana, anti-hermitiana, ortogonal, unitária ou nenhuma destas):

a) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad T(x, y) = (x - i \cdot y, \quad i \cdot x + 2017y)$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (-2y + z, 2x + 3z, -x - 3y),$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$

$$T(x, y) = (\cos(\theta) \cdot x - \mathrm{sen}(\theta) \cdot y, \quad \mathrm{sen}(\theta) \cdot x + \cos(\theta) \cdot y).$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z).$

Problema 8.[Problema 5.57-Pulino] Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $< \cdot, \cdot >$ e $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que quaisquer duas das seguintes propriedades implicam a terceira:

i) T é simétrico;

ii) T é uma isometria sobre V;

iii) $T^2 = I$.

Problema 9. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz anti-simétrica. Mostre que a matriz $(I + A)$ é invertível e que a matriz

$$(I - A)(I + A)^{-1}$$

é ortogonal.

Problema 10. Seja V um espaço vetorial real munido com um produto interno $< \cdot, \cdot >$ e $W \subset V$ um subespaço de dimensão finita com base ortonormal $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Defina a projeção ortogonal $pr_W : V \to W$ sobre W . Além disso, assinale verdadeiro ou falso:

( ) pr_W é um operador linear simétrico;

( ) $\mathrm{Im}(pr_W) = V$;

( ) $\mathrm{Im}(pr_W) = W$;

( ) $\mathrm{Ker}(pr_W) = W^{\perp}$;

( ) $\mathrm{Ker}(pr_W) = W$;

( ) pr_W é um operador linear idempotente;

( ) pr_W é um operador linear nilpotente;

( ) pr_W é um operador linear auto-reflexivo;

( ) seja β uma base ortonormal de V então $[pr_W]_{\beta}^{\beta}$ é simétrica e idempotente.

Problema 11. Seja V um espaço vetorial real munido de produto interno $< \cdot, \cdot >$ e seja $P : V \to V$ um operador simétrico e idempotente. Mostre que P é a projeção ortogonal sobre o subespaço $W := \mathrm{Im}(P)$.

Problema 12.[Problema 5.67-Pulino] Seja $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $u = P(v)$ é a projeção ortogonal de v sobre o plano W dado por

$$3x + 2y + z = 0.$$

a) Encontre $P(x, y, z)$;

b) Determine $\mathrm{Im}(P)$;

c) Determine $\mathrm{Ker}(P)$.

Problema 13.[Problema 5.69-Pulino] Considere o espaço vetorial real $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$< p, q > = \int_0^1 p(x)q(x)dx \quad , \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Determine a projeção ortogonal do elemento $q(x) = x^2$ sobre o subespaço $W = P_1(\mathbb{R}) \subset P_2(\mathbb{R})$.

Problema 14. Seja V um espaço vetorial real com produto interno $< \cdot, \cdot >$ e $S \subset V$ um subespaço. Seja $\beta = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ uma base ortonormal de S. Dado $u \in V$, mostre que $pr_S(u)$ é o ponto de S que minimiza a distância até u, ou seja,

$$||u - pr_S(u)|| = \min\{||u - z|| : z \in S\},$$

onde $|| \cdot ||$ é a norma induzida pelo produto interno de V.

Problema 15. Mostre que a transformação $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$P(x, y, z) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{5}}z, \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-x+2z}{\sqrt{5}}\right)$$

é uma projeção ortogonal sobre um certo subespaço W de $\mathbb{R}^3$ e determine tal subespaço W.

Problema 16. Seja V um espaço vetorial real munido de produto interno $< \cdot, \cdot >$ e $W \subset V$ um subespaço de dimensão finita com base ortonormal $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Defina a reflexão $R : V \to V$ sobre W paralelamente a $W^\perp$. Além disso, assinale verdadeiro ou falso:

( ) R é um operador linear simétrico;

( ) $\text{Im}(R) = V$;

( ) $\text{Im}(R) = W$;

( ) $\text{Ker}(R) = W$;

( ) $\text{Ker}(R) = \{0_V\}$;

( ) R é um operador linear idempotente;

( ) R é um operador linear ortogonal;

( ) R é um operador linear auto-reflexivo;

( ) seja β uma base ortonormal de V então $[pr_W]_\beta^\beta$ é simétrica e idempotente.

Problema 17. Em cada um dos casos abaixo V é um espaço vetorial real ou complexo munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Prove que:

a) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz hermitiana então todos os seus autovalores são reais e autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

b) Se $T : V \to V$ é uma transformação hermitiana então todos os seus autovalores são reais e autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

c) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz positiva definida então todos os seus autovalores são positivos.

d) Se $T : V \to V$ é uma transformação hermitiana e positiva então todos os seus autovalores são positivos.

e) Se $U \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz ortogonal então todos os seus autovalores tem módulo igual a 1.

f) Se $T : V \to V$ é uma transformação ortogonal então todos os seus autovalores tem módulo igual a 1.

Problema 18. Prove que se $T : V \to V$ é um operador linear hermitiano e S é um subespaço T-invariante de V (isto é, $T(u) \in S$ para todo $u \in S$) então $S^{\perp}$ também é T-invariante.

Problema 19. Enuncie e demonstre o teorema espectral.

Problema 20. Mostre que os seguintes operadores lineares são diagonalizáveis:

a) $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) =$$
$$= \left(a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3, 2a - bx + 7cx^2, 3a + 7bx + 2017cx^2, 4a - 2017dx^3\right)$$

onde $P_4(\mathbb{R})$ está munido com o produto interno:

$$< a + bx + cx^2 + dx^3, \quad a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 >= aa' + bb' + cc' + dd'.$$

v) $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2017 & i - 1 & \sqrt{2} \\ -1 - i & 2 & (2 + i)^7 \\ \sqrt{2} & (2 - i)^7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Problema 21. Verdadeiro ou falso:

( ) Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{R})$) é positiva definida se, e somente se, A for hermitiana (resp. simétrica) e todos os autovalores de A forem positivos.

( ) Um operador $T : V \to V$ em um espaço vetorial complexo (resp. real), hermitiano(resp. simétrico) é positivo se, e somente se, $[T]_\beta^\beta$ é hermitiana (resp. simétrica) e positiva definida para qualquer base β de V.

( ) Um operador $T : V \to V$ em um espaço vetorial complexo (resp. real), hermitiano(resp. simétrico) é positivo se, e somente se, $[T]_\beta^\beta$ é hermitiana (resp. simétrica) e positiva definida para qualquer base ortonormal β de V.

Problema 22. Em cada caso determine se a matriz é positiva definida ou não:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2017 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazendo $ac > b^2$ e $a > -c$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}$.

Forma canônica de Jordan

Problema 23. Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente, mostre que todos os autovalores de T são nulos.

Problema 24. Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente de índice n em um espaço vetorial V de dimensão $n + 2$. Determine todas as possibilidades para a forma canônica de Jordan de T.

Problema 25. Determine a forma canônica de Jordan em cada um dos seguintes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.