Prova 2 de MA- 327– Álgebra Linear - Turmas A e B

2.^{o} semestre de 2017 – 19/10/2017

Nome:______________________________

RA:______________________________

Turma:______________________________

Questões	Valores	Notas
1.^{a}	2.5	
2.^{a}	2.5	
3.^{a}	2.5	
4.^{a}	2.5	
Bônus.	1.0	
Total	11.0	

1.^{a} Questão. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ a seguinte operação

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p(1)q(1)$$

com $p(t), q(t) \in P_2(\mathbb{R})$.

a) (1.5) Mostre que a operação acima define um produto interno em $P_2(\mathbb{R})$ e calcule a matriz deste produto interno na base canônica.

b) (1.0) Utilizando a matriz do produto interno determine $< p, q >$ onde $p(t) = 1$ e $q(t) = 2 + t^2$. Qual é o ângulo determinado pelos polinômios p e q?

2.^{a} Questão.

a) (1.5) Sejam u e v vetores em um espaço vetorial complexo V com produto interno $< \cdot, \cdot >$. Mostre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right).$$

onde $|| \cdot ||$ é a norma induzida pelo produto interno.

b) (1.0) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que

$$V = U \oplus W$$

mostre que existe um produto interno $< \cdot, \cdot >$ em V tal que

$$< u, w >= 0$$

para todos $u \in U$ e $w \in W$.

3.^{a} Questão. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (y + 3z, -y + 2z, z)$$

e seja $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

a) (1.0) Mostre que T possui três autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 0$. Determine os autoespaços V_1, V_{-1} e V_0 associados respectivamente a λ_1, λ_2 e λ_3.

b) (1.0) Diagonalize T, ou seja, encontre uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P de forma que

$$[T]_\beta^\beta = P^{-1} \cdot D \cdot P.$$

c) (0.5) Calcule T^{2017}.

4.^{a} Questão. Considere os subespaços $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y - z + w = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y + z + 2w = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

a) (1.5) Determine uma base β para o subespaço $U \cap V$ e, a partir desta base, encontre uma base ortonormal γ de $U \cap V$.

b) (1.0) Seja $v = (x, y, z, w) \in U \cap V$, determine $[v]_\gamma$ onde γ é a base que você encontrou na alternativa (a).

Questão bônus.(1.0) Para $c > 1$, $c \neq 1$, e pontos x, y distintos em $\mathbb{R}^k$, considere os pontos $z \in \mathbb{R}^k$ tais que

$$\|z - x\| = c\|z - y\|.$$

Mostre que estes pontos pertencem a uma esfera $\|z - z_0\| = r$ de centro z_0 e raio r. Encontre o centro z_0 e o raio r em termos de x, y e c. E se $c = 1$?

Boa Prova!