MA 327 - Turmas A e B - Revisão P2

Profs. Gabriel Ponce & João Paulo Pitelli
IMECC- UNICAMP

Autovalores, autovetores e diagonalização

Problema 1. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear de um $\mathbb{F}$-espaço vetorial V de dimensão n.

a) Defina o que são autovalores de T.

b) Defina o que são autovetores de T.

c) Defina o que são os autoespaços V_λ associados aos autovalores λ de T.

d) Seja β uma base de V mostre que $\lambda \in \mathbb{F}$ é um autovalor de T se, e somente se,
$$\det([T]_\beta^\beta - \lambda \cdot I_n) = 0,$$
onde I_n denota a matriz identidade $n \times n$.

e) Conclua que se λ é autovalor de T então $V_\lambda = \mathrm{Ker}([T]_\beta^\beta - \lambda \cdot I_n)$ onde β é uma base qualquer de V.

A igualdade obtida no problema a seguir é muito importante no processo de diagonalização uma vez que ela nos mostra qual é a matriz "P" que devemos tomar para diagonalizar a matriz dada no enunciado.

Problema 2. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear de um $\mathbb{F}$-espaço vetorial V de dimensão n.

a) Defina o que significa dizer que T é diagonalizável.

b) Sejam β e γ duas bases de V, mostre que

$$[T]_\gamma^\gamma = ([I]_\beta^\gamma)^{-1} \cdot [T]_\beta^\beta \cdot [I]_\beta^\gamma.$$

Observe então que se $A = [T]_\gamma^\gamma$ e $D = [T]_\beta^\beta$ for uma matriz diagonal então a matriz P que diagonaliza A, ou seja, a matriz P que satisfaz

$$A = P^{-1}DP$$

é dada pela matriz mudança de base $P = [I]_\beta^\gamma$.

Problema 3. Seja V um $\mathbb{F}$-espaço de dimensão finita, mostre que uma transformação linear $T : V \to V$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de V formada por autovetores de T (Mostre que se β é uma base de V formada por autovetores então $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal).

O resultado do problema a seguir nos diz que se uma transformação linear de um espaço n-dimensional possui n autovalores distintos então ela é diagonalizável. Isto simplifica muitos casos onde necessitamos provar que uma transformação é diagonalizável.

Problema 4. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear com $\dim(V) = n$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores de T. Mostre que se $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todos $i \neq j$, então T é diagonalizável.

Problema 5. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Encontre os autovalores e autovetores de A.

b) Mostre que A é diagonalizável (sem calcular a forma diagonal).

c) Encontre matrizes P e D de forma que

$$A = P^{-1} \cdot D \cdot P$$

e de forma que D seja uma matriz diagonal.

Problema 6. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$T(a + bx + cx^2) = (a - b + c) + \frac{1}{2}bx + \left(2c - \frac{3}{2}b\right)x^2.$$

a) Mostre que T é diagonalizável e encontre uma base γ de forma que $[T]_\gamma^\gamma$ seja diagonal.

b) Seja γ de forma que $D = [T]_\gamma^\gamma$ é a matriz diagonal encontrada no item anterior. Encontre uma matriz P de forma que

$$[T]_\beta^\beta = P^{-1}DP$$

onde β é a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.

c) Calcule $T^5 = T \circ T \circ T \circ T \circ T$.

Problema 7. Considere $\gamma = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Uma certa matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ é tal que A possui autovetores $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1)$ associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$ e $\lambda_3 = 1$. Determine A.

Problema 8. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ uma transformação linear diagonalizável e com exatamente 2 autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$. Mostre que

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}.$$

Problema 9. Mostre que a matriz $A \in M_3(\mathbb{C})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ e encontre sua forma diagonal.

Produto interno, norma e ortogonalidade

Problema 10. Defina

a) Produto interno em espaço vetorial real.

b) Produto interno em espaço vetorial complexo.

c) Norma.

d) Norma induzida por um produto interno.

e) Matriz de um produto interno.

Problema 11. Mostre que as seguintes funções definem produtos internos nos respectivos espaços:

a) $V = P_n(\mathbb{R})$,

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx, \quad p, q \in V.$$

b) $V = M_n(\mathbb{R})$

$$< A, B >:= \mathrm{tr}(B^t A), \quad A, B \in V.$$

Problema 12. A função $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) >= x_1x_2 + y_1y_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^3$?

Problema 13.(Pulino) Considere o espaço vetorial real $V = P_2(\mathbb{R})$ munido com o produto interno $< \cdot, \cdot >$ dado por

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

para todos $p, q \in V$.

a) Determine a matriz do produto interno em relação à base canônica

$$\beta = \{p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2\}.$$

b) Considere os polinômios $p, q \in V$ dados por: $p(x) = -1 + 3x + x^2$ e $q(x) = 4 + 2x - x^2$. Determine o produto interno entre os elementos p e q utilizando a matriz do produto interno.

c) Seja $p(x) = -1 + 3x + x^2$ determine todos os polinômios $q \in V$ tais que $< p, q >= 0$.

Problema 14. Enuncie e demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Problema 15.

a) Defina os conceitos de ortogonalidade e ortonormalidade. Defina também o que é uma base ortogonal e uma base ortonormal para um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$.

b) Mostre que se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal então β é L.I.

Problema 16. Seja V um espaço vetorial real com produto interno $< \cdot, \cdot >$ e seja $|| \cdot ||$ a norma induzida por este produto interno. Sejam $u, v \in V$ vetores não nulos em V. Prove que u é ortogonal a v se, e somente se, $||u + \alpha v|| \geq ||u||$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 17. Seja $\beta = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ uma base ortogonal de um espaço vetorial V n-dimensional com produto interno $< \cdot, \cdot >$. Mostre que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{< v, q_i >}{< q_i, q_i >} q_i.$$

Problema 18. Seja $\beta = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ uma base ortonormal de um espaço vetorial V n-dimensional com produto interno $< \cdot, \cdot >$. Mostre que

$$< u, v >= \sum_{i=1}^{n} < u, q_i > \overline{< v, q_i >}.$$

Problema 19. Enuncie o Teorema do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Problema 20. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Determine uma base ortogonal para o subespaço W definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}.$$

Problema 21. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno $< \cdot, \cdot >$ dado por

$$< A, B >= \operatorname{tr}(B^t A).$$

Determine uma base ortogonal para o subespaço W das matrizes triangulares inferiores a partir da base $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ onde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 22. Nas condições do problema 8 mostre que é possível definir um produto interno $< \cdot, \cdot >$ em V de forma que dados quaisquer $v_1 \in V_{\lambda_1}, v_2 \in V_{\lambda_2}$ temos

$$< v_1, v_2 >= 0.$$