Questões	Valores	Notas
1.^{a}	2.5	
2.^{a}	2.5	
3.^{a}	2.5	
4.^{a}	2.5	
Bônus.	1.0	
Total	11.0	

Prova 1 de MA- 327– Álgebra Linear - Turmas A e B
2.^{o} semestre de 2017 – 05/09/2017

Nome: Fibonacci
RA:1123581321

1.^{a} Questão. Uma matriz é dita triangular inferior quando todos os elementos acima da diagonal principal da matriz são nulos. Analogamente, uma matriz é dita triangular superior quando todos os elementos abaixo da diagonal principal da matriz são nulos.

a) (1.0) Mostre que os conjuntos $V_I \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ das matrizes triangulares inferiores e $V_S \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ das matrizes triangulares superiores são subespaços vetoriais de V.
b) (1.0) Mostre que $\mathbb{R}^{n\times n} = V_I + V_S$.
c) (0.5) É verdade que $\mathbb{R}^{n\times n} = V_I \oplus V_S$?

2.^{a} Questão.

a) (1.0) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Sejam $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ vetores linearmente independentes (L.I). Mostre que os vetores $v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1$ também são linearmente independentes (L.I).

b) (1.5) Seja W o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + 4z = 0\}.$$

Obtenha uma base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ de forma que $\{u_1, u_2, u_3\}$ seja uma base para W.

3.^{a} Questão. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real formado pelos polinômios de grau menor ou igual a 3 e coeficientes reais. Considere o conjunto

$$\beta = \{1 - x,\ x - x^2,\ x^2 - x^3,\ 1 + x + x^2 + x^3\}.$$

a) (1.0) Mostre que β é uma base.

b) (1.0) Seja $\eta = \{1, x, x^2, x^3\}$ a base canônica de V, determine a matriz mudança de base $[I]_\beta^\eta$. Seja $u \in V$ tal que

$$[u]_\eta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix},$$

calcule $[u]_\beta$.

c) (0.5) Seja

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

determine a base γ de V para a qual $P = [I]_\gamma^\beta$.

4.^{a} Questão. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $\dim(V) = n \geq 1$, sobre um corpo $\mathbb{F}$. Diremos que uma transformação linear $T : V \to V$ satisfaz a propriedade (KI) se

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T).$$

a) (0.75) Mostre que se T for injetora então T não pode satisfazer a propriedade (KI).
b) (0.75) Mostre que se T satisfaz a propriedade (KI) então n é par.
c) (1.0) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que satisfaz a propriedade (KI).

Questão bônus.(1.0) Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funções reais contínuas em $[a, b]$. Considere a matriz quadrada $n \times n$, $G = (g_{ij})_{i,j=1}^{n}$ cujas entradas são dadas por

$$g_{ij} = \int_a^b f_i(x) f_j(x) dx.$$

Mostre que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\det G = 0$.

Boa Prova!