Lista 1 - Complementar - de Álgebra Linear

Segundo Semestre de 2017

1.^{a} Questão (Callioli). No conjunto $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ definamos a "adição" assim:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$$

e multiplicação por escalares como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Nestas condições V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

2.^{a} Questão (Callioli). Seja V o conjunto dos pares ordenados de números reais. V não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois seguintes pares de operações sobre V:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $\alpha(x, y) = (x, \alpha y)$;

b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ e $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.

Diga em cada caso quais dos 8 axiomas não se verificam.

3.^{a} Questão (Callioli). No espaço vetorial $M_{3x2}(\mathbb{R})$, consideremos os vetores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ de maneira que $A = t_1 B + t_2 C$?

4.^{a} Questão (Callioli). No espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$, sejam dados os vetores $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t^2 + t - 1$ e $h(t) = t + 2$. Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = k_1 g(t) + k_2 h(t)$?

5.^{a} Questão (Callioli). Quais conjuntos abaixo são sub-espaços do espaço $P(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais?

a) $W = \{f(t) \in P(\mathbb{R}) : f(t)\text{tem grau maior que } 2\}$

b) $W = \{f(t) \in P(\mathbb{R}) : f(0) = 2f(1)\}$

c) $W = \{f(t) \in P(\mathbb{R}) : f(t) => 0, \forall\, t \in \mathbb{R}\}$

d) $W = \{f(t) \in P(\mathbb{R}) : f(t) + f'(t) = 0\}$

6.^{a} Questão (Callioli). Mostrar que os polinômios $1 - t$, $(1 - t)^2$, $(1 - t)^3$ e 1 geram $P_3(\mathbb{R})$.

7.^{a} Questão. A união de dois sub-espaços vetoriais é um sub-espaço vetorial? Demonstre ou dê um contra-exemplo.

8.^{a} Questão (Callioli). Mostre que o espaço das funções contínuas $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(t)\text{é contínua}\}$ é um espaço vetorial. A partir daí, mostre que os subconjuntos

$$\{\sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t, \}, \quad \{1, \sin 2t, \cos 2t, \} \tag{1}$$

geram o mesmo sub-espaço vetorial de $C(\mathbb{R})$.

9.^{a} Questão (Callioli). Seja $\{u, v, w\}$ um conjunto L.I. de vetores de um espaço vetorial V. Mostre que o conjunto $\{u + v - 3w, u + 3v - w, v + w,\}$ é L.D.

10.^{a} Questão (Callioli). Verificar se as seguintes matrizes geram o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.^{a} Questão (Callioli). Determine quais dos conjuntos são espaços vetoriais com as operações dadas. Para os que não são, liste todos os axiomas que falham.

a) O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais com as operações

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ e } k(x, y) = (2kx, 2ky).$$

b) O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais com as operações

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1) \text{ e } k(x, y) = (kx, ky).$$

c) O conjunto de todos os polinômios da forma $at + b$ com as operações

$$(a_0 + a_1t) + (b_0 + b_1t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t \text{ e } k(a_0 + a_1t) = (ka_0) + (ka_1)t.$$

d) O conjunto de todos os números reais positivos com as operações

$$x + y = xy \text{ e } kx = x^k.$$

12.^{a} Questão (Callioli). Determine quais dos conjuntos são subespaços vetoriais de $M_2(\mathbb{R})$.

a) todas as matrizes 2×2 com entradas inteiras.

b) todas as matrizes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tais que $a + b + c + d = 0$.

c) todas as matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

13.^{a} Questão (Callioli). Determine quais dos conjuntos são subespaços vetoriais de $P_3(\mathbb{R})$.

a) todos os polinômios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ para os quais $a_0 = 0$.

b) todos os polinômios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ para os quais $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

c) todos os polinômios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ para os quais a_0, a_1, a_2 e $a_3 = 0$ são inteiros.

c) todos os polinômios da forma $a_0 + a_1t$, onde a_0 e a_1 são números reais inteiros.

14.^{a} Questão (Boldrini). Sejam $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y=0 \,\text{e}\, z-t=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y-z+t=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.

b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

c) Determine $W_1 + W_2$.

d) $W_1 + W_2$ é soma direta? (Dizemos que $U + W$ é soma direta quando $U \cap W = \{0\}$.)

e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

15.^{a} Questão (Callioli). Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V de dimensão n. Se $\dim(U) > n/2$ e $\dim(W) > n/2$, prove que $U \cap W \neq \{0\}$.

16.^{a} Questão (Callioli). Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores de um espaço vetorial V. Provar que se cada vetor u de $S = [u_1, \ldots, u_n]$ admite uma única representação como combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$, então os vetores $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de S.

17.^{a} Questão (Callioli). Determinar a dimensão dos seguintes subespaços de $M_n(\mathbb{R})$:

a) Subespaço das matrizes simétricas;

b) Subespaço das matrizes anti-simétricas;

c) Subespaço das matrizes A tais que $A = 2A^t$;

a) Subespaço das matrizes $A = (a_{ij})$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$.

18.^{a} Questão (Boldrini). Seja $P(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os polinômios (de qualquer grau) com coeficientes reais. Existe uma base finita para este espaço? Encontre uma "base" para $P(\mathbb{R})$ e justifique então por que $P(\mathbb{R})$ é conhecido como um espaço de dimensão infinita.

19.^{a} Questão. Considere o subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ gerado pelos vetores $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t^2 + t^3$, $p_3(t) = -2 + 2t + t^2 + t^3$ e $p_2(t) = 1$.

a) O vetor $q(t) = 2 - 3t + 2t^2 + 2t^3 \in [p_1, p_2, p_3, p_4]$? Justifique.

b) Exiba uma base para $[p_1, p_2, p_3, p_4]$. Qual é a dimensão?

c) $[p_1, p_2, p_3, p_4] = P_3(\mathbb{R})$? Por quê?

20.^{a} Questão (Callioli). A matriz mudança de uma base B do $\mathbb{R}^2$ para a base $\{(1,1),(1,2)\}$ desse mesmo espaço é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar a base B.

21.^{a} Questão (Callioli). Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ assim relacionadas:

$$\begin{array}{rcrcrcr} g_1 & = & e_1 & - & e_2 & - & e_3 \\ g_2 & = & & & 2e_2 & + & 3e_3 \\ g_2 & = & 3e_1 & & & + & e_3 \end{array}$$

a) Determinar as matrizes de mudança de B para C e de C para B.

b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta as coordenadas 1, 2 e 3, em relação a B, quais as coordenadas de u relativamente a C?

22.^{a} Questão (Callioli). Considere o seguinte espaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} | x - y - z = 0 \right\}$$

a) Mostre que os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ são bases de U:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Achar a matriz mudança de base de B para C e de C para B.

23.^{a} Questão (Callioli). Seja $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base do espaço vetorial C e seja $C = \{u_1, u_1 - u_2, \ldots, u_1 - u_n\}$. Mostrar que C é também uma base de V. Achar as matrizes de mudança de base de B para C e de C para B.

24.^{a} Questão (Callioli). Seja W o subespaço de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

O vetor $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in W$?

25.^{a} Questão (Callioli). Quais as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base $B = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?

26.^{a} Questão (Callioli). Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.

b) Exiba uma base para $[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Qual é a dimensão?

c) $[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbb{R}^4$? Por quê?

27.^{a} Questão (Callioli). Sejam $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ e $B_2 = \left\{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\right\}$.

a) Ache as matrizes de mudança de base $[I]_B^{B_1}$, $[I]_{B_1}^B$ e $[I]_{B_2}^B$.

b) Quais as coordenadas de $v = (3, -2)$ em relação às bases B, B_1 e B_2?

c) As coordenadas de um vetor u em relação à base B_1 são dadas por $[u]_{B_1} = (4, 0)$. Quais as coordenadas de u em relação às bases B e B_2?