Tópicos de Matemática para Olimpíadas

Profs. Gabriel Ponce & Plamen Kochloukov
IMECC- UNICAMP

1. Determine uma fórmula geral para o termo da sequência:

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots \quad .$$

2. Defina a sequência $(a_n)_n$ recursivamente por $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}, \quad n \geq 1.$$

Determine uma fórmula explicita para (a_n) em termos de n.

3. Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(f(f(n))) + 6f(n) = 3f(f(n)) + 4n + 2001,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Seja $(x_n)_n$ uma sequência de inteiros positivos tais que $x_{x_n} = n^4$ para todo $n \geq 1$. É verdade que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$?

5. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^{x+1} dx = \frac{1}{2}.$$

6. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma sequência sub-aditiva, ou seja,

$$x_{n+m} \leq x_n + x_m, \quad n, m \geq 1.$$

Mostre que a sequência $\frac{x_n}{n}$ converge e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{x_n}{n}.$$