Tópicos de Matemática para Olimpíadas

Profs. Gabriel Ponce & Plamen Kochloukov
IMECC- UNICAMP

1 Busca por Padrões

1. Determine uma fórmula para o termo geral da sequência dada por: $x_1 = 1$,

$$x_n = x_{n-1} + n \quad \text{se } n \text{ é ímpar}$$

$$x_n = x_{n-1} + n - 1 \quad \text{se } n \text{ é par.}$$

2. Defina a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$, e

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n, \quad \text{para } n \geq 0.$$

Prove que n divide a_n para todo $n \geq 1$.

3. A sequência $a_0, a_1, a_2, ...$ satisfaz

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}),$$

para todos os inteiros não negativos m e n com $m \geq n$. Se $a_1 = 1$, determine a_n.

4. Considere as sequências $(a_n)_n, (b_n)_n$, definidas por

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 0,$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = a_n - b_n + b_{n-1}, \quad n \geq 0.$$

Prove que $(a_n)^3 = b_{3n}$ para todo n.

5. Considere as sequências $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ definidas por $a_1 = 3$, $b_1 = 100$, $a_{n+1} = 3^{a_n}$, $b_{n+1} = 100^{b_n}$. Determine o menor número m para o qual $b_m > a_{100}$.

2 Recorrências Lineares

6 Seja $\{x_n\}$ uma sequência dada por $x_0 = 3, x_1 = 1$, e $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$. Encontre uma expressão para o termo geral x_n.

7. Dados $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, e a relação $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^n$ para $n \geq 1$. Encontre uma recorrência linear que descreva a_n.

8. Sejam a_n, b_n, e c_n PG's com razões distintas entre si e seja $a_n + b_n + c_n = d_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Se $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = -7$, $d_5 = 13$, e $d_6 = -16$, determine d_7.

9. Find all possible values of x_0 and x_1 such that the sequence defined by:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_n}{3x_{n-1} - 2x_n}, \quad n \geq 1$$

contains infinitely many natural numbers.

10**.** Seja $p(x) = x^2 - 3x + 2$. Mostre que para qualquer inteiro positivo n existem, e são únicos, valores a_n e b_n tais que o polinômio $q_n(x) = x^n - a_n x - b_n$ é divisível por $p(x)$.

11**.** Seja $(x_n)_{n\geq 0}$ definida pela relação de recorrência $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, com $x_0 = 0$. Mostre que a expressão $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}$ depende apenas de b e de x_1 mas não de a.

12**.** A sequência $(x_n)_n$ é definida por $x_1 = 4$, $x_2 = 19$, e para $n \geq 2$,

$$x_{n+1} = \left\lceil \frac{x_n^2}{x_{n-1}} \right\rceil.$$

Prove que $x_n - 1$ é sempre múltiplo de 3.

13**.** Considere as sequências dadas por

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + \sqrt{5a_n^2 - 4}}{2}, \quad n \geq 1,$$

$$b_0 = 0, \quad b_{n+1} = a_n - b_n, \quad n \geq 1.$$

Prove que $(a_n)^2 = b_{2n+1}$ para todo n.