Análise 1 - MA502 & MM202 - Avaliação Substitutiva

Prof. Gabriel Ponce

Nome: RA:

1	2	3	4	5	6	7	Total

Instruções:

- Coloque nome completo em **TODAS** as folhas;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu. No caso de haver escolha de mais de 3 questões dentre as questões $1-5$, serão corrigidas apenas as 3 primeiras indicadas.

Questões escolhidas:

Escolha 3 questões dentre os problemas $1-5$.

Problema 1: (2.0)

a) (1.5) Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado inferiormente e c um número real positivo. Mostre que o conjunto

$$c \cdot A := \{c \cdot a : a \in A\}$$

é limitado inferiormente e que $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf(A)$.

b) (0.5) Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 2017$, mostre que

$$2017 \leq \frac{(2b-c)^2}{a} + \frac{(2c-a)^2}{b} + \frac{(2a-b)^2}{c}.$$

Problema 2:

a) (0.5) Defina conjunto enumerável.

b) (1.5) Mostre que o conjunto $\{s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} : s_n \in \{0,1\}\}$ é um conjunto não enumerável.

Problema 3: (2.0) Indique verdadeiro (e neste caso demonstre a afirmação) ou falso (apresente um contra exemplo).

( ) Seja $E \subset \mathbb{R}$, então $\mathring{E} = \overline{\mathring{E}}$.

( ) Seja $E \subset \mathbb{R}$, então $\overline{E} = \overline{\mathring{E}}$.

( ) Seja (X, d) um espaço métrico. Um subconjunto $E \subset X$ é aberto se, e somente se, E^c é fechado.

( ) Sejam (X, d_x), (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Se X é um espaço métrico compacto então $f(X) \subset Y$ é um conjunto compacto.

Problema 4: (2.0)

a) (1.0) Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reais não nulos defina

$$\alpha := \limsup_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Mostre que se $\alpha < 1$ então a série dada converge em $\mathbb{R}$.

b) (1.0) Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n - 2\sqrt{n}}$$

é convergente em $\mathbb{R}$.

Problema 5: (2.0) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

i)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \quad \text{para algum } \alpha \in \mathbb{R};$$

ii)
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \beta \quad \text{para algum } \beta \in \mathbb{R}.$$

Prove que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Resolva AMBAS as questões 6 e 7.

Problema 6: (2.0) Sejam $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espaços métricos.

a) (1.0) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) < f(b)$. Mostre que se $c \in \mathbb{R}$ é tal que

$$f(a) < c < f(b)$$

então existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

b) (1.0) Sejam $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se X é compacto então f é uniformemente contínua.

Problema 7: (2.0)

a) (1.0) Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Mostre que f é uma função crescente.

b) (1.0) Suponha que $a \in \mathbb{R}$ e que f é uma função duas vezes diferenciável definida em (a, ∞). Defina M_0, M_1, M_2 por

$$M_0 := \sup_{x \in (a,\infty)} |f(x)|, \quad M_1 := \sup_{x \in (a,\infty)} |f'(x)|, \quad M_2 := \sup_{x \in (a,\infty)} |f''(x)|.$$

Prove que

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

Boa prova!