Análise 1 - MA502 & MM202 - Segunda Avaliação

Prof. Gabriel Ponce

Nome: RA:

1	2	3	4	5	6	7	Bônus	Total

Instruções:

- Coloque nome completo em **TODAS** as folhas;
- Escreva de forma clara os argumentos utilizados;
- Não escreva no quadro de pontuação acima;
- Devolva esta folha juntamente com as soluções ao final da avaliação.
- Indique abaixo quais questões você escolheu. No caso de haver escolha de mais de 3 questões dentre as questões $1-5$, serão corrigidas apenas as 3 primeiras indicadas.

Questões escolhidas:

Escolha 3 questões dentre os problemas $1-5$.

Problema 1: (2.0) Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reais. Defina

$$\alpha := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

a) (1.0) Mostre que se $\alpha < 1$ então a série dada converge em $\mathbb{R}$.

b) (1.0) Mostre que se $\alpha > 1$ então a série dada diverge em $\mathbb{R}$.

Problema 2: (2.0)

a) (1.0) Sejam $(X, d_x), (Y, d_Y)$ espaços métricos. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que se X é um espaço métrico compacto então $f(X)$ é um conjunto compacto.

b) (1.0) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num espaço métrico compacto X. Mostre que existem $a, b \in X$ tais que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

para todo $x \in X$.

Problema 3: (2.0) Seja E_n uma sequência de conjuntos fechados não vazios e limitados em um espaço métrico completo X. Se $E_n \supset E_{n+1}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \text{diam} E_n = 0$$

então a interseção

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

consiste de um único ponto.

Problema 4: (2.0) Sejam f, g funções reais contínuas em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e diferenciáveis em (a, b). Mostre que existe um ponto $x \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x).$$

Problema 5: (2.0) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

i)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \quad \text{para algum } \alpha \in \mathbb{R};$$

ii)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta \quad \text{para algum } \beta \in \mathbb{R}.$$

Prove que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Resolva AMBAS as questões 6 e 7.

Problema 6: (2.0) Sejam $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espaços métricos.

a) (1.5) Mostre que $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, dado qualquer conjunto aberto $V \subset Y$, $f^{-1}(V) \subset X$ é um conjunto aberto.

b) (0.5) Mostre que $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, dado qualquer conjunto fechado $V \subset Y$, $f^{-1}(V) \subset X$ é um conjunto fechado.

Problema 7: (2.0) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) := e^x$. Assuma conhecido que $h'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) (1.0) Calcule o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-\pi)^2 \cdot e^x}{x^4}.$$

b) (1.0) Sejam α, β números reais satisfazendo $\alpha^2 > 4\beta$ e sejam a e b as raízes de

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0.$$

Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável satisfazendo as seguintes condições:

i) $f(0) = 1,\ f'(0) = 0;$

ii)
$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) \geq 0,$$
para todo $x \in [0, \infty)$.

Prove que
$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left(a e^{-bx} - b e^{-ax} \right), \quad x \geq 0.$$

Bônus. (2.0) Seja α um número real tal que
$$n^\alpha \in \mathbb{Z}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que α é um inteiro não negativo.

Boa Prova!!