# Derivadas de Ordem Superior.

definição: Se $f$ tem derivada $f'$ em um intervalo, e se $f'$ é diferenciável denotamos a derivada de $f'$ por $f''$.

Continuando desta maneira, denotamos por $f^{(n)}$ a derivada de $f^{(n-1)}$ e chamaremos $f^{(n)}$ de $n$-ésima derivada de $f$ ou derivada de ordem $n$ de $f$.

Se $f$ for uma função tal que $f^{(n)}$ é contínua então $f$ é dita de classe $C^n$ e denotamos: $f \in C^n$.

Teorema de Taylor Suponha que $f$ é uma função real em $[a,b]$, $n$ é um inteiro positivo, $f^{(n-1)}$ é contínua em $[a,b]$, $f^{(n)}(t)$ existe para todo $t \in (a,b)$. Sejam $\alpha, \beta$ pontos distintos de $[a,b]$. Defina:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t-\alpha)^k.$$

Então existe um ponto $x$ entre $\alpha$ e $\beta$ tal que:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta-\alpha)^n.$$

prova. Tome $M \in \mathbb{R}$ dado por: $f(\beta) = P(\beta) + M \cdot (\beta-\alpha)^n$.

Tome $g(t) = f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n$, $a \leq t \leq b$.

Temos que mostrar que existe $x$ entre $\alpha$ e $\beta$ tal que $n!M = f^{(n)}(x)$.

Observe que $P^{(n)}(t) = 0$, logo:

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!\,M \quad , \quad a < t < b.$$

Assim, basta mostrar que $g^{(n)}(x) = 0$ para algum $x$ entre $\alpha$ e $\beta$.

- Observe que: $P(\alpha) = f(\alpha)$

$$P'(\alpha) = \left[ f(\alpha) + f'(\alpha)(t-\alpha) + \dots \right]' = f'(\alpha)$$

$$\vdots$$

$$P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha), \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Assim: $g^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha) - P^{(k)}(\alpha) - n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)\cdot M\cdot(\alpha-\alpha)^{n-k} = 0$

para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Além disso, $g(\beta) = 0$ (pela forma como tomamos o $M$), então pelo TVM, existe $x_1$ entre $\alpha$ e $\beta$ tal que $\boxed{g'(x_1) = 0}$.

Como $g'(x_1) = g'(\alpha) = 0$, pelo TVM existe $x_2$ entre $\alpha$ e $x_1$ tal que $\boxed{g''(x_2) = 0}$. Procedemos por indução: suponha que para um certo $1 \le m \le n-1$ tinhamos um $x_m$ entre $\alpha$ e $\beta$ tal que $g^{(m)}(x_m) = 0$. Então, como $g^{(m)}(\alpha) = 0$ segue pelo TVM que existe $x_{m+1}$ entre $\alpha$ e $\beta$ tal que:

$$g^{(m+1)}(x_{m+1}) = 0$$

Assim, existe $x_n$ entre $\alpha$ e $\beta$ tal que $g^{(n)}(x_n) = 0$ como queríamos ∎

• Em qual o polinômio $P(\beta)$ é chamado de polinômio de Taylor de ordem $\underline{n-1}$.

• $R_n(\beta) := \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot (\beta-\alpha)^n$ é chamado de resto de Taylor de ordem $(n-1)$

## Teorema (Teste da segunda derivada)

Sejam $A$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que pertença a $C^2$. Suponhamos que $x_0 \in A$ é tal que $f'(x_0) = 0$.

Então:

i) se $f''(x_0) > 0$ então $x_0$ é ponto de mínimo local para $f$

ii) se $f''(x_0) < 0$ então $x_0$ é ponto de máximo local para $f$.

prova.

i) Como $f''$ é contínua e $f''(x_0) > 0$ então existe uma vizinhança $V = B(x_0, \varepsilon)$ de $x_0$ tal que:

$$\text{se } x \in V \text{ então } f''(x) > 0.$$

Agora, para cada $x \neq x_0$ defina $h = x - x_0$. Então $|h| < \varepsilon$ $\therefore$

$$x_0 + h,\ x_0 - h \in V.$$

Pelo Teorema de Taylor aplicado para ordem 1 temos que existe $\bar{x}$ entre $x$ e $x_0$ tal que:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(\bar{x})}{2!} \cdot h^2$$

Como $f'(x_0) = 0$ então: $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}) \cdot h^2$.

Mas $\bar{x} \in V$ logo $f''(\bar{x}) > 0$. Assim: $f(x) > f(x_0)$.

Ou seja, $x_0$ é mínimo local de $f$.

ii) Exercício! (Similar ao caso i) ■