$$h'(x) = \frac{1}{g^2(x)} \cdot [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] \qquad \blacksquare$$

Exemplo.

1. Considere $f(x) \equiv c$. Então $f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 0$, $\forall x$.

2. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.

3. $f(x) = x^n$.

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t-x)}{t-x} \cdot (t^{n-1} + t^{n-2}x + \dots + t x^{n-2} + x^{n-1}) =$$

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

4. Todo polinômio é diferenciável

Teorema. Suponha que f é uma função contínua em $[a,b]$, $f'(x)$ existe em um certo ponto $x \in [a,b]$, g está definida em um intervalo I que contém o domínio de f, e g é diferenciável no pto $f(x)$. Se

$$h(t) = g(f(t)), \qquad a \leq t \leq b,$$

então h é diferenciável em x e

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

. prova :

Seja $y = f(x)$. Pela definição de derivada temos :

$$f(t) - f(x) = (t-x) \cdot (f'(x) + u(t))$$

$$g(s) - g(y) = (s-y)(g'(y) + v(s))$$

onde $t \in [a,b]$, $s \in I$ e $\lim_{t \to x} u(t) = 0$, $\lim_{s \to y} v(s) = 0$.

Tome $s = f(t)$ na segunda igualdade :

$$h(t) - h(x) = g(f(t)) - g(f(x)) =$$

$$= (f(t) - f(x)) \cdot (g'(y) + v(s)) =$$

$$= (t-x) \cdot (f'(x) + u(t)) \cdot (g'(y) + v(s)) .$$

Assim, se $t \neq x$, $\dfrac{h(t)-h(x)}{t-x} = (g'(y) + v(s)) \cdot (f'(x) + u(t))$.

Tomando $t \to x$ temos, pela continuidade de f que $s = f(t) \to f(x) = y$.

Logo $v(s) \to 0$. Assim,

$$\lim_{t \to x} \frac{h(t)-h(x)}{t-x} = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \blacksquare$$

Exemplos.

a) Seja f definida por $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$

Assuma que a derivada de $\operatorname{sen} x$ é $\cos x$.

Para $x \neq 0$ temos então: $f'(x) = 1 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$

$$f'(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}.$$

Para $x = 0$ precisamos usar a definição de derivada.

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t \operatorname{sen} 1/t}{t} = \operatorname{sen} \frac{1}{t}$$

Como este limite não existe quando $t \to 0$ então $f'(0)$ não existe.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Para $x \neq 0$ temos $f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Em $x = 0$ temos:

$$\left| \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \right| = \left| \frac{t^2 \operatorname{sen}(1/t)}{t} \right| = |t| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right| \leq |t|$$

Logo $f'(0)$ existe e $f'(0) = 0$. Logo f é diferenciável em todos os ptos.

Observe que $\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$ não existe. Logo f'

não é contínua em $x=0$.

Valor Médio.

definição: Seja f uma função real definida em um espaço métrico X.

Diremos que f tem máximo local em um ponto $p \in X$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(q) \leq f(p), \text{ para todo } q \in X \text{ com } d(p,q) < \delta.$$

Mínimos locais são definidos de forma similar.

Teorema. Seja f definida em $[a,b]$; se f tem um máximo local em um ponto $x \in (a,b)$, e se $f'(x)$ existe, então $f'(x) = 0$. O mesmo é válido para mínimo local

prova.

Tome $\delta > 0$ proveniente da definição de máximo local, isto é:

$$a < x-\delta < x < x+\delta < b$$

tal que se $|y-x| < \delta$ então $f(y) \leq f(x)$.

Assim, se $x-\delta < t < x$ temos $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0$ pois $f(t)-f(x) \leq 0$, $t-x<0$

Logo $f'(x) \leq 0$. Mas se $x < t < x+\delta$ então $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq 0$, pois $t-x>0$ e $f(t)-f(x) \leq 0$. Logo $f'(x) \geq 0$.

Concluimos então que $f'(x) = 0$ ∎

Teorema do Valor Médio Generalizado. Sejam f, g funções reais contínuas em $[a,b]$ que são diferenciáveis em (a,b), então existe um ponto $x \in (a,b)$ para o qual

$$[f(b)-f(a)] \cdot g'(x) = [g(b)-g(a)] \cdot f'(x).$$

(Note que não pedimos que f, g sejam diferenciáveis em a e b).

prova: Coloquemos $h(t) := [f(b)-f(a)] \cdot g(t) - [g(b)-g(a)] \cdot f(t)$, $a \leq t \leq b$

Como f e g são contínuas então h é contínua em $[a,b]$ e, como f e g são diferenciáveis em (a,b), h é diferenciável em (a,b).

Agora,

$$h(a) = (f(b)-f(a)) \cdot g(a) - (g(b)-g(a)) f(a) =$$

$$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

e

$$h(b) = (f(b)-f(a)) g(b) - (g(b)-g(a)) \cdot f(b)$$

$$= g(a)f(b) - g(b)f(a)$$

Logo $h(a) = h(b)$. Precisamos mostrar que $\exists\, x \in (a,b)$ tq $h'(x) = 0$.

- Se h é constante não há nada a fazer.

- Se $h(t) > h(a)$ para algum $t \in (a,b)$, tome $x \in [a,b]$ um valor onde h atinge o máximo em $[a,b]$. Então $x \neq a$ e $x \neq b$, logo $x \in (a,b)$. Pelo Teorema anterior $h'(x) = 0$ como queríamos.

• Se $h(t) < h(a)$ fazemos o mesmo tomando $x \in [a,b]$ um ponto onde h atinge mínimo ■ (Exercício para Nota - 7).

<u>Teorema do Valor Médio</u>. Seja f uma função real contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b), então existe um ponto $x \in (a,b)$ no qual

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(x)$$

<u>prova</u>. Basta tomar $g(x) = x$ no Teorema anterior ■

<u>Teorema</u>. Suponha que f é diferenciável em (a,b).

a) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, então f é monótona crescente.

b) Se $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, então f é constante.

c) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, então f é monótona decrescente.

prova.

a) Suponha que $x < y$. Então existe $\xi \in (x,y)$ tal que:

$$f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(\xi)$$

Como $y - x > 0$ e $f'(\xi) \geq 0$, então $f(y) \geq f(x)$ $\therefore$ f é crescente.

b) Suponha que existam $x, y \in (a,b)$ tais que $f(x) \neq f(y)$. Então existe $\xi \in (x,y)$ tal que: $f(x) - f(y) = (x-y) \cdot f'(\xi) = 0$ absurdo.

Logo f é cte.

c) Análogo a (a) ■