Funções Monótonas

definição. Seja f uma função real definida em (a,b). Então f é dita **crescente** em (a,b) se, dados $a<x<y<b$ tivermos: $f(x) \leq f(y)$.

- f é dita decrescente em (a,b) se dados $a<x<y<b$ tivermos: $f(x) \geq f(y)$.

Uma função f é dita monótona se f é crescente ou decrescente.

Teorema. Seja f uma função crescente em (a,b). Então $f(x-)$ e $f(x-)$ existem para todo $x \in (a,b)$. Mais precisamente,

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

Além disso, se $a<x<y<b$, então $f(x+) \leq f(y-)$.

prova. Tome $x \in (a,b)$ qualquer. Como f é crescente então o conjunto

$$E(x) = f((a,x)) = \{ f(t) : a<t<x \}$$

é limitado superiormente, logo admite um sup. Denotaremos

$$A = \sup E(x) = \sup_{a<t<x} f(t).$$

Vamos mostrar que $A = f(x-)$.

Tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Da definição de A, $A-\varepsilon$ não é lim. sup. de $E(x)$.

Logo existe $\delta > 0$ tal que $a < x - \delta < x$ e $\boxed{A - \varepsilon < f(x-\delta) \leq A.}$ (I)

Como f é crescente então: para todo $x - \delta < t < x$ temos

$$\boxed{f(x-\delta) \leq f(t) \leq A.} \quad (\mathrm{II})$$

Assim, para qq $x - \delta < t < x$ temos que:

$$-\varepsilon < 0 \leq A - f(t) = (A-\varepsilon) + (\varepsilon - f(t)) \underset{(\mathrm{I})}{<} f(x-\delta) - f(t) + \varepsilon \underset{(\mathrm{II})}{\leq} \varepsilon$$

Ou seja, $|A - f(t)| < \varepsilon$, $\forall$ $x - \delta < t < x$. Portanto, $f(x-) = A$.

Analogamente se prova que $f(x+) = \inf\limits_{x<t<b} f(t)$.

Agora, se $a < x < y < b$, então pelo que acabamos de provar temos:

do fato que f é crescente

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t)$$

Similarmente:

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t).$$

Concluindo o que queríamos demonstrar ■

Corolário. Funções monotônicas não tem descontinuidades de segunda espécie.

Teorema. Seja f uma função monótona em (a,b). Então o conjunto de pontos de (a,b) nos quais f é descontínua é no máximo enumerável.

- **prova:**

Suponha que f é crescente e considere E o conjunto de pontos de descontinuidades.

Afirmação: Se $x \in E$ então $f(x-) < f(x+)$.

prova: Como f é monótona, x é de 1ª espécie. Então

$$f(x+) = f(x-) \neq f(x) \quad \text{ou} \quad f(x-) < f(x+).$$

Suponha que ocorre a primeira possibilidade. Então pelo Teorema anterior temos $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) \Rightarrow f(x+) = f(x-) = f(x)$. Absurdo

Logo, ocorre a segunda possibilidade.

Agora, para cada $x \in E$ escolha um número racional $r(x)$ tal que

$$f(x-) < r(x) < f(x).$$

Defina $r: E \to \mathbb{Q}$, $r \to r(x)$. Se $x_1 < x_2$ então $f(x_1+) \leq f(x_2-)$ $\therefore$

$$r(x_1) < r(x_2).$$

Assim r é injetora. Logo $r: E \to r(E)$ é bijetora e $\therefore E \sim r(E)$. Agora $r(E) \subset \mathbb{Q}$ e, portanto, $r(E)$ é enumerável. Logo, E é enumerável c.q.d. ∎

Limites Infinitos & Limites no Infinito

definição. Para qualquer número real c, o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : c < x\} = (c, +\infty)$$

é uma vizinhança de $+\infty$. Analogamente, vizinhanças de $-\infty$ são definidas por $(-\infty, c)$: $c \in \mathbb{R}$.

definição: Seja $E \subset \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que

$$\lim_{t \to x} f(t) = A$$

onde $A, x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, se para qualquer vizinhança $\mathcal{U}$ de A existir uma vizinhança V de x tal que $V \cap E \neq \emptyset$ e tal que

$$f(t) \in \mathcal{U}, \ \forall\, t \in V \cap E, \ t \neq x.$$

- As propriedades básicas de limites permanecem válidas p/ limites infinitos.

Teorema. Sejam $f, g : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$. Sejam

$$\lim_{t \to x} f(t) = A, \quad \lim_{t \to x} f(t) = B.$$

Então:

a) $\lim_{t \to x} f(t) = A' \Rightarrow A = A'$

b) $(f+g)(t) \to A + B$

c) $(f \cdot g)(t) \to A \cdot B$

d) $\frac{f}{g}(t) \to \frac{A}{B}$

sempre que os termos envolvidos estiverem ben definidos.

Obs: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞ / ∞, $A/0$ não estão definidos.

Diferenciação

A partir de agora trabalharemos apenas com funções reais.

definição: Seja f definida em $[a,b]$. Para qualquer $x \in [a,b]$ defina

$$\phi(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \quad t \in (a,b), t \neq x.$$

Definimos a derivada de f em x como sendo o seguinte limite, caso ele exista,

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t). \quad (*)$$

Se tal limite não existir diremos apenas que f não é derivável em x.

Chamamos de derivada de f a função f', cujo domínio é o cjto de pontos para os quais $(*)$ existe, dada por $(*)$.

Nomenclatura. Se f' estiver definida em um ponto x, diremos que f é diferenciável em x.

Se f for diferenciável em todo $x \in E$, diremos que f é diferenciável em E.

- Se f é definida em (a,b) então para $a < x < b$, $f'(x)$ é definida da mesma forma (ou seja, por $(*)$).

Teorema. Seja f definida em $[a,b]$. Se f é diferenciável em um ponto $x \in [a,b]$, então f é contínua em x.

Prova. Observe que:

$$f(t)-f(x) = \left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right) \cdot (t-x).$$

Tomando o limite de cada lado temos

$$\lim_{t\to x} f(t)-f(x) = \left(\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right) \cdot \lim_{t\to x} (t-x) = f'(x)\cdot 0 = 0$$

Portanto, $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$, isto é, f é contínua em x ∎

Teorema: Suponha que f e g são definidas em $[a,b]$ e são diferenciáveis em um ponto $x \in [a,b]$. Então $f+g$, $f\cdot g$ e $\frac{f}{g}$ são diferenciáveis em x e

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

b) $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, onde assumimos $g(x) \neq 0$.

demonstração:

(a) segue do fato que soma de limites é limite da soma.

(b) Tome $h = f \cdot g$. Então

$$h(t) - h(x) = f(t)g(t) - f(x)g(x) =$$

$$= f(t)(g(t) - g(x)) + f(t)g(x) - f(x)g(x) =$$

$$= f(t)(g(t) - g(x)) + g(x)(f(t) - f(x)).$$

Então, $\forall\, t \neq x$ temos: $\dfrac{h(t)-h(x)}{t-x} = f(t)\cdot\left(\dfrac{g(t)-g(x)}{t-x}\right) + g(x)\cdot\left(\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}\right)$.

Observe que do lado direito o limite quando $t \to x$ existe, logo tb deve existir do lado esquerdo. Assim

$$\lim_{t\to x} \frac{h(t)-h(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\left[f(t)\cdot\left(\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right) + g(x)\cdot\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right)\right] =$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x).$$

Logo $h'(x) = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$.

c) Tome $h = \dfrac{f}{g}$. Então

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x} = \frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\cdot\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right) - f(x)\cdot\left(\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right)\right].$$

Tomando o limite quando $t \to x$ em ambos os lados temos:

$$h'(x) = \frac{1}{g^2(x)} \cdot [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] \qquad \blacksquare$$