Convergência Absoluta

def. a) A série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se $\sum |a_n|$ é convergente.

b) Se $\sum a_n$ converge mas $\sum |a_n|$ não converge, diremos que $\sum a_n$ converge não-absolutamente.

Exemplo. i) $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolutamente.

ii) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (pelo critério de Leibnitz) mas não converge absolutamente.

Teorema. Se $\sum a_n$ converge absolutamente então $\sum a_n$ converge.

prova: $|a_n| \leq |a_n|$. Pelo teste da comparação o resultado segue ∎

Adição & Multiplicação de Séries

Teorema. Se $\sum a_n = A$ e $\sum b_n = B$, então $\sum (a_n + b_n) = A + B$ e

$\sum c \cdot a_n = c \cdot A$, para qualquer c fixado.

prova. (Exercício - Nota - 5)

- Ou seja, séries convergentes podem ser somadas termo a termo. A multiplicação de duas séries é um pouco mais complicada.

definição. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries, defina

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Chamamos $\sum c_n$ de **o produto** das duas séries dadas.

Exemplo. Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

Pelo critério de Leibnitz ela é convergente. Considere $\sum c_n$ o produto dela por ela mesma.

Então $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$. Agora observe que:

$$(k+1)(n-k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 .$$

Logo $|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}} = (n+1) \cdot \frac{2}{n+2}$.

Assim $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0 \therefore \sum c_n$ diverge.

Teorema (Mertens) Suponha que:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$.

d) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B .$$

Ou seja, o produto de duas séries convergentes converge para o produto dos limites quando pelo menos uma delas é absolutamente convergente.

prova. Coloquemos

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ , \ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \ , \ C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \ , \quad \beta_n = B_n - B .$$

Então,

$$C_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) =$$

$$= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 =$$

$$= a_0 (B + \beta_n) + \ldots + a_n (B + \beta_0) = A_n \cdot B + a_0 \beta_n + \ldots + a_n \beta_0 . \quad (*)$$

Considere $\gamma_n = a_0 \beta_n + \ldots + a_n \beta_0$. Vamos mostrar que $\gamma_n \to 0$.

Seja $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ($\alpha < +\infty$ pois $\sum a_n$ é abs. convergente). Por (c) sabemos que: $\beta_n \to 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$ tome $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall\, n \geq N \text{ temos: } \quad |\gamma_n| \leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \cancel{|\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0|}$$

$$\cancel{\leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \cdot \alpha}$$

Mantendo N fixo e fazendo $n \to +\infty$ temos que:

$$0 \leq \limsup_{n \to \infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon \cdot \alpha$$

Como ε é arbitrário temos $\limsup_{n \to \infty} |\gamma_n| = 0$.

Logo $\lim_{n\to\infty} |\rho_n| = 0$ (pois $0 \le \liminf_{n\to\infty} |\rho_n| \le \limsup_{n\to\infty} |\rho_n| = 0$).

Então por (A) segue que $\lim_{n\to\infty} C_n = A \cdot B$ ■

Teorema. Se as séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ e $\sum c_n$ convergem para A, B e C onde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. Então $C = A \cdot B$.

Rearranjos

Definição. Seja $\{k_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, uma sequência na qual todo inteiro positivo aparece exatamente uma vez. Colocando:

$$a_n' := a_{k_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dizemos que $\sum a_n'$ é um rearranjo ou reagrupamento de $\sum a_n$.

Exemplo. Considere $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Então:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots \le 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6-3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

Agora considere o rearranjo $\sum b_n$ dado por:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Sejam $(B_n)_n$ as somas parciais desta reagrupamento temos que:

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{8k-3}{(4k-3)(4k-1)2k} > 0, \quad \forall\, k \ge 1.$$

Logo, $$B_3 < B_3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = B_6$$

$$B_6 < B_6 + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} = B_9$$

$$\vdots$$

$$B_{3(k-1)} < B_{3k} \qquad \text{(Exercício).}$$

Assim $B_3 < B_6 < B_9 < \dots$. Logo, $\limsup B_n > B_3 = \frac{5}{6}$.

<u>Teorema</u> (Muuuuuuito legal)

Seja $\sum a_n$ uma série convergente mas não absolutamente convergente. Suponha que:

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$$

Então existe um reagrupamento $\sum a'_n$ com somas parciais s'_n tal que:

$$\liminf_{n\to\infty} s'_n = \alpha \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} s'_n = \beta .$$

prova: Tomemos $p_n := \frac{|a_n| + a_n}{2}$, $q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Então $p_n - q_n = a_n$ e $p_n + q_n = |a_n|$, $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$.

<u>Afirmação 1</u>. Ambas as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são divergentes.

<u>prova</u>. Se $\sum p_n$ e $\sum q_n$ forem convergentes, então $\sum (p_n + q_n) = \sum |a_n|$ será convergente o que não ocorre.

Se $\sum p_n$ for convergente e $\sum q_n$ divergente, então $\sum a_n$ será divergente pois:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n .$$

Analogamente, não pode-se ter $\sum q_n$ conv. e $\sum p_n$ divergente. Logo ambas divergem ▲

Agora considere a seq. $P_1, P_2, P_3, \ldots$ de termos não negativos de $\sum a_n$ na ordem que eles ocorrem.

Considere $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ a sequência dos módulos dos valores negativos de $\sum a_n$ na ordem em que eles ocorrem.

- Observe que $\sum P_n$ difere de $\sum p_n$ apenas por termos NULOS. O mesmo ocorre para $\sum Q_n$ e $\sum q_n$.

Assim, $\sum P_n$ e $\sum Q_n$ divergem.

- Construção do reagrupamento procurado:

- Tome (α_n), (β_n) sequências tais que: $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$,

  $\alpha_n < \beta_n, \forall n$ e $\beta_1 > 0$.

- Tome m_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{m_1} > \beta_1 .$$ (Existe pois $\sum P_n$ diverge)

Tome K_1 o menor inteiro positivo tal que:

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - Q_2 - \ldots - Q_{K_1} < \alpha_1$$ (Existe pois $\sum Q_i$ diverge).

• Tome m_2 o menor inteiro positivo ($m_2 > m_1$) tal que:

$$(P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1}) + P_{m_1+1} + \dots + P_{m_2} > \beta_2$$

e k_2 o menor inteiro positivo ($k_2 > k_1$) tal que:

$$(P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1}) + P_{m_1+1} + \dots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \dots - Q_{k_2} < \alpha_2 .$$

Continuamos esta construção por indução.

Seja $x_n := (P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1}) + \dots + (P_{m_{n-1}+1} + \dots + P_{m_n})$

$$y_n := (P_1 + \dots + P_{m_1} - Q_1 - \dots - Q_{k_1}) + \dots - Q_{k_{n-1}+1} - \dots - Q_{k_n} ,$$

então $x_n > \beta_n$, $y_n < \alpha_n$ e como m_n é o menor tal que a soma x_n passa de β_n temos: $x_n - P_{m_n} \leq \beta_n$ $\therefore$

$$\boxed{x_n - \beta_n = |x_n - \beta_n| \leq P_{m_n}} \qquad (*)$$

Analogamente: $\boxed{|y_n - \alpha_n| \leq Q_{k_n}}$.

Como $a_n \to 0$ (pois $\sum a_n$ converge) temos que $P_n \to 0$ e $Q_n \to 0$.
Logo, por (*) temos que:

$$|x_n - \beta_n| \to 0 , \quad |y_n - \alpha_n| \to 0$$

o que implica

$$x_n \to \beta \quad e \quad y_n \to \alpha .$$

Considere o reagrupamento $\sum b_i$ construído anteriormente.

Acabamos de mostrar que α e β são limites de subsequências das somas parciais de $\sum b_i$.

- Agora observe que QUALQUER soma parcial B_m de $\sum b_i$ é maior ou igual a α e menor ou igual a β.

Logo de fato

$$\liminf_{m\to\infty} B_m = \alpha \quad , \quad \limsup_{m\to\infty} B_m = \beta \quad . \quad \text{c.q.d} \quad \blacksquare$$

Em contraste com o Teorema anterior, para séries absolutamente convergentes todo reagrupamento converge e para o mesmo valor.

Teorema. Se $\sum a_n$ é uma série de números complexos absolutamente convergente, então todo reagrupamento de $\sum a_n$ converge para o mesmo limite $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

prova. Seja $\sum a_n'$ um reagrupamento, denote suas somas parciais por s_n'. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n \geq N$ implica

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \varepsilon .$$

Denotemos o reagrupamento $\sum a_n'$ por: $a_n' := a_{k_n}$.

Escolha $p \in \mathbb{N}$ tal que os valores $1, 2, \dots, N$ estão contidos em $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$.

Então, se $n > p$, os valores $a_1, \dots, a_N$ irão aparecer em s_n e em s_n'.

Logo

$s_n - s'_n$ tem apenas termos da forma a_j com $j > N$.

Em particular,

$$|s_n - s'_n| \leq \varepsilon \quad , \forall\, n > p.$$

Assim,

$$|s'_n - s| \leq |s'_n - s_n| + |s_n - s| < \varepsilon + \underbrace{|s_n - s|}_{\to 0}$$

logo $s'_n \to s$ como queríamos demonstrar ■