Análise I - MA502, Introdução à Análise-MM202
Quinta Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1. Seja f uma função real e definida em todo o $\mathbb{R}$, suponha que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

2. Suponha que $f'(x) > 0$ em (a, b). Prove que f é estritamente crescente em (a, b) e considere $g := f^{-1}$. Prove que g é diferenciável em $f((a, b))$ e que

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad a < x < b.$$

3. Seja g uma função real em $\mathbb{R}$, com derivada limitada (digamos $|g'(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Fixe $\varepsilon > 0$ e defina $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. Prove que f é injetora se ε é pequeno o suficiente.

4. Sejam $C_0, C_1, ..., C_n$ constantes reais tais que

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + ... + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0.$$

Mostre que a equação

$$C_0 + C_1 x + ... + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

tem pelo menos uma raíz real entre 0 e 1.

5. Suponha que f é definida e diferenciável para todo $x > 0$, e $f'(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$. Coloquemos $g(x) = f(x + 1) - f(x)$. Prove que $g(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.

6. Suponha que

- f é contínua para $x \geq 0$,
- $f'(x)$ existe para $x > 0$,
- $f(0) = 0$,
- f' é monótona crescente.

Defina

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x > 0$$

e mostre que g é monótona crescente.

7. Suponhamos que $f'(x), g'(x)$ existam, $g'(x) \neq 0$ e $f(x) = g(x) = 0$. Prove que

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8. Suponha que f' é contínua em $[a, b]$ e $\varepsilon > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

para todos $x, t \in [a, b]$ com $0 < |t - x| < \delta$.

9. Seja f uma função real contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ existe para todo $x \neq 0$ e $\lim_{x \to 0} f'(x) = 3$. É verdade que $f'(0)$ necessariamente existe?

10. Seja $f(x) = |x|^3$, calcule $f'(x)$ e $f''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e mostre que $f^{(3)}(0)$ não existe.

11. Seja f uma função real diferenciável definida em (a, b). Prove que f é convexa se, e somente se, f' é crescente.

12. Suponha que $a \in \mathbb{R}$, f é duas vezes diferenciável definida em (a, ∞), e M_0, M_1, M_2 são respectivamente dados por

$$M_i := \sup_{x \in (a, \infty)} |f^{(i)}(x)|, \quad i = 0, 1, 2.$$

Prove que

$$M_1^2 \leq 4 M_0 M_2.$$

13. Suponha que f é diferenciável em $[a, b]$, $f(a) = 0$, e existe um número real A tal que

$$|f'(x)| \leq A|f(x)| \quad \text{em } [a, b].$$

Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

14. Assumindo as definições e propriedades das funções seno, cosseno, logaritmo, exponencial etc., calcule:

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^k}{e^x}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

iv) $\lim_{x\to p^+} \frac{e^{\cos(x-p)-1}-1}{(x-p)^3}$

15. Determine a derivada da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{se } x \neq 0$$

$$f(0) = 0.$$