Análise I - MA502, Introdução à Análise-MM202
Quarta Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

No que segue, X e Y são sempre espaços métricos.

1. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função satisfazendo

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto implica que f é contínua?

2. Seja$f : X \to Y$ uma função contínua, mostre que $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ para todo conjunto $E \subset X$. Dê um exemplo onde a inclusão é própria.

3. Seja f uma função real contínua em X. Seja $Z(f) := \{p \in X : f(p) = 0\}$, mostre que $Z(f)$ é fechado.

4. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e $E \subset X$ um subconjunto denso. Mostre que $f(E)$ é denso em Y.

5. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Seja $E \subset X$ um conjunto denso tal que $f(p) = g(p)$ para todo $p \in E$. Prove que $f = g$.

6. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe uma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(p) = f(p)$ para todo $p \in E$.

7. Seja $f : E \to Y$ uma função, o conjunto

$$\{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times Y$$

é chamado de gráfico de f. Suponha que E é um conjunto compacto. Prove que f é contínua em E se, e somente se, seu gráfico é compacto.

8. (*Esta questão corresponde ao Teorema* 4.20 *do Rudin*) Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não compacto. Mostre que

1) existe uma função contínua em E que não é limitada;

2) existe uma função contínua e limitada em E que não tem máximo;

3) se E for limitado então, existe uma função contínua em E que não é uniformemente contínua.

9. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Prove que f é limitada em E. Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de E ser limitado é essencial.

10. Seja $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Suponha que $f : I \to I$ é uma função contínua. Prove que existe $x \in I$ tal que $f(x) = x$.

11. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é aberta se $f(V)$ é aberto em Y para todo V aberto em X. Prove que toda função aberta contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona.

12. Se E é um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X, d), definimos a distância de $x \in X$ a E por

$$\rho_E(x) := \inf_{z \in E} d(x, z).$$

a) Prove que $\rho_E(x) = 0$ se, e somente se, $x \in \overline{E}$.

b) Prove que ρ_E é uniformemente contínua em X mostrando que

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y).$$

13. Sejam K e F dois conjuntos disjuntos em um espaço métrico (X, d). Seja F fechado e K compacto, prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$d(p, q) > \delta$$

para todo $p \in K$ e $q \in F$. Mostre que a conclusão pode falhar se nenhum deles for compacto.
Dica: A função ρ_F definida no exercício anterior é uma função contínua e positiva em K.

14. Uma função real f definida em (a, b) é dita convexa em (a, b) se: dados quaisquer $a < x < b$, $a < y < b$ e $0 < \lambda < 1$ temos

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Prove que toda função convexa em (a, b) é contínua em (a, b).

15. Assuma que f é uma função real contínua definida em (a, b) tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

para todos $x, y \in (a, b)$. Prove que f é convexa.