logo $x \leq b_m, \forall m$ e $x \geq a_m, \forall m$. Assim $x \in I_m, \forall m$, ou seja

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ ■

Teorema. Seja $K \in \mathbb{N}^*$. Se $\{I_n\}$ é uma sequência de K-células tais que: $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1,2,3)$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ é não vazio.

prova. Consideremos:

$$I_n = I_{n,1} \times \dots \times I_{n,K}$$

$$I_{n,j} = [a_{nj}, b_{nj}] \quad , \quad 1 \leq j \leq K$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada j, a sequência $\{I_{n,j}\}$ satisfaz as condições do teorema anterior. Logo $\exists$ x_j tal que:

$$x_j \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{n,j} .$$

Tome $x := (x_1, x_2, \dots, x_K)$. Então $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ c.q.d ■

Teorema. Toda K-célula é compacta.

prova. Seja I uma K-célula dada por $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_K, b_K]$. Coloquemos

$$\delta = \left\{ \sum_{1}^{K} (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2} \longrightarrow \text{distância máxima na } K\text{-célula } I$$

Então $|x-y| \leq \delta$, se $x \in I$ e $y \in I$.

Suponha por contradição que existe cob. aberta $\{G_\alpha\}$ de I que não admite subcobertura finita.

Tome $c_j = \frac{a_j + b_j}{2}$. Os intervalos $[a_j, c_j]$, $[c_j, b_j]$ determinam 2^k - k células Q_i cuja união é I.

Então, pelo menos uma dessas k-células Q_i tb não admite subcobertura finita. Chame-a de I_1.

Repetindo seu processo temos uma sequência de k-células $\{I_i\}$ tais que:

1) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$

2) I_n não é coberto por qq subcoleção finita de $\{G_\alpha\}$.

3) se $x \in I_n$ e $y \in I_n$, então $|x-y| \leq 2^{-n} \cdot \delta$.

Por (a) e por um teo anterior, existe $x^* \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} I_j$. Considere α tal que $x^* \in G_\alpha$.

Como G_α é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x^*, r) \subset G_\alpha$.

Tome n grande o suficiente para que: $\frac{\delta}{r} \leq 2^n$. Então $2^{-n} \cdot \delta \leq r$.

Assim se $y \in I_n$ então $y \in B(x^*, r) \subset G_\alpha \therefore I_n \subset G_\alpha$, o que contradiz (2) ■

Teorema. Seja $E \subset \mathbb{R}^k$, são equivalentes:

a) E é fechado e limitado

b) E é compacto

Heine - Borel

c) Todo subcjto infinito de E tem ponto de acumulação em E

prova:

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja E fechado e limitado. Como E é limitado existe uma k-célula I tal que:

$$E \subset I.$$

Pelo teo. anterior I é compacto, logo E é cpcto pois é um fechado dentro de um compacto.

(b) $\Rightarrow$ (c) Teo. anterior

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponha que E não seja limitado. Então podemos tomar $\{x_n\} = F$ tal que: $\|x_n\| > n$, $\forall\, n$.

· F é infinito e não possui ptos de acumulação (Exercício) absurdo.

Então, E é limitado.

Suponha que E não seja fechado. Então existe $x_0 \in X$ um ponto de acumulação de E tal que $x_0 \notin E$.

Defina F um cjto de pontos $\{x_n\}$ tal que $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$, $\forall\, n$.

Observe que x_0 é o único ponto de acumulação de E, pois se y é de acumulação temos:

$$\|y-x_n\| \geq \|x_0-y\| - \|x_n-x_0\| > \|x_0-y\| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}\|x_0-y\|, \quad \forall n.$$

Assim $\|x_0-y\|=0 \therefore x_0=y$.

Pela hipótese de (c) segue que $x_0 \in E$, caindo em contradição e isto conclui a prova ■

Teorema (Weierstrass) Todo subcjto infinito e limitado de $\mathbb{R}^k$ tem pontos de acumulação em $\mathbb{R}^k$.

prova. Seja E tal conjunto. Como E é limitado existe k-célula I tal que $E \subset I$. Como I é compacto, pelo item (c) segue o que queríamos ■

Teorema. Bolas fechadas em $\mathbb{R}^k$ são compactas.

prova. $B[x,r]$ é fechado e limitado, portanto é compacto. Em particular qq intervalo fechado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ é compacto ■

Conjuntos Perfeitos

Lembrando. E é dito perfeito se é fechado e todo ponto de E for ponto de acumulação de E.

Teorema. Seja P um conjunto perfeito em $\mathbb{R}^k$. Então P é não-enumerável.

prova. Como P tem pontos de acumulação, P é infinito. Suponha que P é enumerável. Podemos então denotar os pontos de P por:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Considere V_1 uma vizinhança de x_1. Então $\overline{V_1}$ é compacto e V_1 tem infinitos pontos de P.

Tome um desses pontos (distinto de x_1) e, ao redor deste ponto, tome uma vizinhança V_2 tal que: $x_1 \notin V_2$.

Como V_2 ainda tem infinitos pts de P podemos continuar o processo.

Assim construimos uma sequência de vizinhanças V_n tais que:

1) $\overline{V}_1 \supset \overline{V}_2 \supset \overline{V}_3 \supset \ldots$ (todos compactos)

2) $x_n \notin V_{n+1}$, $\forall n$

3) $V_n \cap P \neq \emptyset$, $\forall n$.

Então tome $K_n = \overline{V}_n \cap P$. Observe que K_n é fechado e limitado $\therefore$ é compacto. Como (por 1) $K_{n+1} \subset K_n$, $\forall n$, então

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Mas então $(\bigcap \overline{V}_n) \cap P \neq \emptyset$, o que contradiz (2).

Logo P é de fato não-enumerável ■

<u>Corolário</u>. Todo intervalo $[a,b]$ é não-enumerável. Em particular $\mathbb{R}$ é não enumerável.