Sequências e Séries

Sequências Convergentes

definição. Uma sequência (p_n) em um espaço métrico X é dita convergente se existe um ponto $p \in X$ com a seguinte propriedade:

para todo $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então

$$d(p, p_n) < \varepsilon.$$

Neste caso também diremos que p_n converge para p ou que p é o limite de (p_n) e escreveremos:

$$p_n \longrightarrow p \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to \infty} p_n = p.$$

· Se $\{p_n\}$ não for convergente diremos que p_n é divergente.

definição. Dada uma sequência (p_n), os elementos p_n são chamados de termos da sequência (p_n).

Dada uma sequência (p_n), o conjunto $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ é chamado de conjunto imagem da sequência.

Uma seq (p_n) é dita limitada se seu conjunto imagem é limitado.

cuidado: a definição de seq. convergente (p_n) depende do espaço métrico onde a sequência está.

Exemplos.

a) $s_n = \frac{1}{n}$; então $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$; a sequência é limitada.

b) $s_n = n^2$; a sequência é divergente e ilimitada

c) $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$

d) $s_n = (-1)^n$; a sequência é divergente.

Teorema. Seja (p_n) uma seq. em um espaço métrico X.

a) (p_n) converge para $p \in X$ se, e somente se, toda vizinhança ao redor de p contém todos os termos de (p_n) exceto, possivelmente, uma quantidade finita de termos.

b) Se $p \in X$, $p' \in X$ e se (p_n) converge a p e a p' então $p = p'$.

c) Se (p_n) é convergente então (p_n) é limitada.

d) Se $E \subset X$ e se p é ponto de acumulação de E então existe uma sequência $(p_n) \subset E$ tal que $p_n \to p$.

prova.

a) Suponha que $p_n \to p$ e tome $V = B(p, r)$ vizinhança de p. Como $p_n \to p$, para $\varepsilon = r$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $d(p_n, p) < r$, $\forall\, n \geq N$. Ou seja,

$$p_n \in V, \ \forall\, n \geq N.$$

Agora vamos provar a recíproca. Dado $\varepsilon > 0$ qq tome $V = B(p, \varepsilon)$. Como V não contém apenas uma qtd finita de termos de (p_n), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $p_n \in V$ $\forall\, n \geq N$.

Ou seja, $\forall\, n \geq N$ temos $d(p_n, p) < \varepsilon$. Logo $p_n \to p$ c.q.d ■

b) Seja $\varepsilon > 0$ dado. Existem inteiros N, N' tais que:

$$n \geq N \text{ implica } d(p_n, p) < \varepsilon/2,$$

$$n \geq N' \text{ implica } d(p_n, p') < \varepsilon/2.$$

Então, para qualquer $n \geq \max\{N, N'\}$ temos:

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$$

Logo $p = p'$ ■

c) Suponha que $p_n \to p$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall\, n \geq N$ temos

$$p_n \in B(p, 1).$$

Tome $R = \max\{d(p_j, p) : 1 \leq j \leq N-1\}$. Então $p_n \in B(p, s)$, $\forall\, n \geq 1$ onde $s = \max\{1, 2R\}$. Logo (p_n) é limitada.

d) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, tome um ponto $p_n \in (B(p, 1/n) \setminus \{p\}) \cap E$.

É fácil ver que $(p_n) \subset E$ e $p_n \to p$ ■

- Relação de limites com as operações

Teorema. Sejam $(s_n), (t_n)$ sequências de números complexos tais que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad , \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

então:

a) $\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$.

b) $\lim_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \cdot s$, $\lim_{n\to\infty} (c + s_n) = c + s$, para $c \in \mathbb{C}$

c) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = s \cdot t$;

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$, quando $s_n \neq 0 \ \forall n$ e $s \neq 0$.

prova.

a) Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\| s_n - s \| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \forall n \geq N_1$$

$$\| t_n - t \| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \forall n \geq N_2.$$

Então: $\| s_n + t_n - (s+t) \| \leq \| s_n - s \| + \| t_n - t \| < \varepsilon$, $\forall \ n \geq \max\{N_1, N_2\}$

Logo $s_n + t_n \to s + t$.

b) (Exercício)

c) Usaremos a seguinte identidade:

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s_n t + s t_n - 2st =$$

$$= (s_n - s)(t_n - t) + t(s_n - s) + s(t_n - t)$$

Dado $\varepsilon > 0$, existem N_1, N_2 tais que:

$$n \geq N_1 \Rightarrow |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Se tomarmos $N = \max(N_1, N_2)$, $n \geq N$ implica:

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon.$$

Logo $\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0$. Agora, por (a) e (b) sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty} t(s_n - s) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} s(t_n - t) = 0.$$

Então, novamente por (a): $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n - st) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$.

d) (Exercício).

Teorema

a) Suponha que $x_k \in \mathbb{R}^k$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ e $x_n = (\alpha_{1,n}; \dots; \alpha_{k,n})$.

Então (x_n) converge para $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ se, e somente se,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_{i,n} = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

b) Suponha que $(x_n), (y_n)$ são sequências em $\mathbb{R}^k$, (β_n) é uma seq. em $\mathbb{R}$ e

$$x_n \to x, \quad y_n \to y, \quad \beta_n \to \beta.$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = x + y, \quad \lim_{n \to \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle,$$

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n x_n = \beta x.$$

prova.

a) Sabemos, pela definição da norma em $\mathbb{R}^k$, que:

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leq \|x_n - x\|, \quad \forall \ 1 \leq j \leq k.$$

Como $x_n \to x$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$.
Logo $\alpha_{j,n} \to \alpha_j$.

Reciprocamente, se $\alpha_{j,n} \to \alpha_j$, $\forall\ 1 \leq j \leq k$, então dado $\varepsilon > 0$, para cada $1 \leq j \leq k$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \quad \forall\ n \geq N_j.$$

Logo, para $N = \max_{1 \leq j \leq k} N_j$ temos: $\forall\ n \geq N$, $|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$, $1 \leq j \leq k$

o que implica: $\|x_n - x\| = \left(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2\right)^{1/2} < \left(k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k}\right)^{1/2} = \varepsilon$.

Logo $x_n \to x$.

b) A parte (b) segue da parte (a) juntamente com o teorema anterior

Vamos fazer o segundo item.

Sabemos que: $\langle x_n, y_n \rangle = x_{1,n} \cdot y_{1,n} + \dots + x_{k,n} \cdot y_{k,n}$.

Como $x_n \to x$, $y_n \to y$, pela parte (a) sabemos que: $x_{i,n} \to x_i$ e $y_{i,n} \to y_i$, $1 \leq i \leq k$.

Pelo teorema anterior temos $x_{i,n} \cdot y_{i,n} \to x_i \cdot y_i$. Então, tb pelo teo anterior, segue que:

$$\lim_{n \to \infty} (x_{1,n} \cdot y_{1,n} + \dots + x_{k,n} \cdot y_{k,n}) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k = \langle x, y \rangle \blacksquare$$

Subsequências

definição. Dada uma sequência (p_n), considere uma sequência de inteiros positivos (n_k), tal que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Então a seq. (p_{n_i}) é chamada de subsequência de (p_n).

Exercício (Nota). Mostre que uma sequência (p_n) converge para p se, e somente se, toda subsequência de (p_n) converge para p.

Teorema.

a) Se (p_n) é uma sequência em um espaço métrico compacto X então (p_n) admite uma subsequência convergente em X.

b) Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^k$ admite uma subsequência convergente.

prova.

a) Considere E o conjunto imagem da sequência. Se E for um conjunto finito então existe $p \in E$ e uma seq. (n_i) de naturais tais que:

$$n_1 < n_2 < \dots \quad , \quad e \quad p_{n_i} = p \, , \; \forall \, i.$$

Neste caso a subsequência (p_{n_i}) converge para $p \in X$.

Se E for infinito então como X é compacto, E tem ponto de acumulação em X. Tome p um 'dessi' pontos de acumulação de E. Vamos encontrar uma subsequência (p_{n_i}) de (p_n) tal que $p_{n_i} \to p$.

- Tome n_1 o menor natural tal que : $d(p_{n_1}, p) < 1$.

- Tome n_2 o menor natural tal que $n_2 > n_1$ e $d(p_{n_2}, p) < 1/2$.

- Tendo tomado n_i, tome n_{i+1} o menor natural tal que $n_{i+1} > n_i$ e e $d(p_{n_{i+1}}, p) < \frac{1}{i+1}$.

Então a subsequência (p_{n_i}) converge para p como queríamos.

(b) Se $E \subset \mathbb{R}^k$ é limitado então existe k-célula $I \subset \mathbb{R}^k$ tal que $E \subset I$.

Como I é compacta, a parte (a) conclui o que queríamos ∎

<u>Teorema</u>. Seja (p_n) uma sequência em um espaço métrico X então o conjunto de todos os limites de subsequências de (p_n) é um conjunto fechado.

<u>prova</u>. Denote por E^* tal conjunto. Tome q um ponto de acumulação de E^*; queremos mostrar que $q \in E^*$.

Tome o primeiro n_1 tal que $p_{n_1} \neq q$ (se tal n_1 não existe, então $E^* = \{q\}$ que é fechado).

Tome $\delta = d(p_{n_1}, q)$. Suponha que $p_{n_1}, \dots, p_{n_{i-1}}$ estão escolhidos. Como q é pto de acumulação de E^*, existe um $x \in E^*$ tal que:

$$d(x, q) < \delta/2^i.$$

Como $x \in E^*$, existe $n_i > n_{i-1}$ tal que : $d(x, p_{n_i}) < \delta/2^i$. Assim temos

$$d(p_{n_i}, q) < \delta/2^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Logo (p_{n_i}) converge para q. Então $q \in E^*$ $\blacksquare$