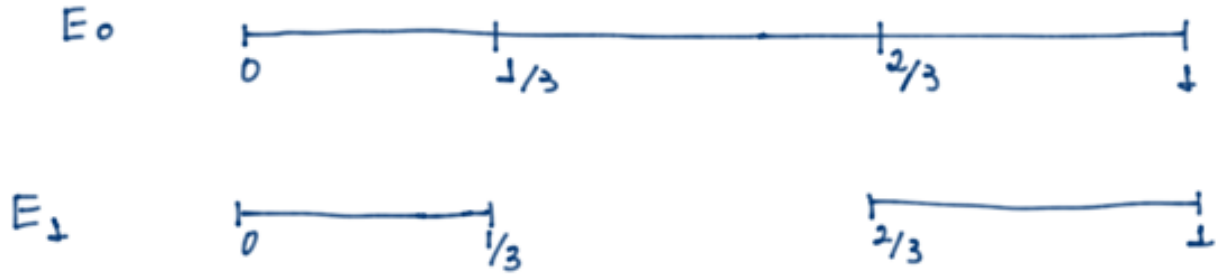
O Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um exemplo de conjunto perfeito e que não contém nenhum segmento. Foi definido abstratamente por Cantor e alguns acreditam que ele pode ter obtido inspiração da seguinte coluna egípcia (já que seu sobrinho era egiptologista)

• Considere $E_0 = [0,1]$. Corte $[0,1]$ em três partes e retire a parte do meio:



Chame $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Repetimos o mesmo processo com cada um dos intervalos que sobraram e aí temos:

$$E_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3; 7/9] \cup [8/9, 1]$$

Continuando desta forma obtemos uma seq. de compactos $\{E_n\}$ tq:

a) $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots$

b) E_n é união de 2^n intervalos, cada um de tamanho $\frac{1}{3^n}$.

<u>definição</u>. O conjunto $P = \bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n$ é chamado de conjunto de Cantor.

<u>Teorema</u>. P é compacto não vazio.

<u>prova</u>. Como a seq. de compactos $\{E_n\}$ satisfaz $E_n \neq \emptyset, \forall n$, e $E_{n+1} \subset E_n$ $\forall n$, então por um teorema anterior $P = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \neq \emptyset$.

Agora P é fechado pois é intersecção de fechados e P é claramente limitado, pois $P \subset [0,1]$. Então P é compacto em $\mathbb{R}$ ∎

Teorema. P não contém nenhum intervalo.

prova. Observe que qq segmento da forma: $\left(\frac{3K+1}{3^m}, \frac{3K+2}{3^m}\right)$ não está em P, $K=0,1,2,\dots$, com $K \leq n$ e $K \leq 3^n - 1$.

Como todo segmento (α, β) contém algum segmento desta forma quando

$$\frac{1}{3^m} < \frac{\beta - \alpha}{6}$$

então $(\alpha, \beta) \not\subset P$ ∎

Teorema. P é perfeito.

prova. Basta provar que P não tem pontos isolados. Tome $x \in P$ e um segmento S contendo x.

Considere I_n o intervalo em E_n que contém x. Escolha n grande o bastante para que $I_n \subset S$ e tome x_n o extremo inferior de I_n.

Pela construção de P, $x_n \in P$ $\forall n$.

Agora, x é ponto de acumulação de $\{x_n\}$ e, portanto, de P. Logo P é perfeito c.q.d ∎

Conjuntos Conexos

definição: Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B, E \subseteq X$

i) Diremos que A e B são separados se $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.

ii) Dizemos que E é conexo se E NÃO pode ser escrito como a união de dois conjuntos não vazios que são separados, ou seja,

$$\text{se } E = A \cup B \text{ com } A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset \text{ então } A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset.$$

Teorema. Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, ele tem a seguinte propriedade:

$$\text{se } x \in E,\ y \in E \text{ e } x < z < y, \text{ então } z \in E.$$

prova.

$(\Rightarrow)$ Assuma que E é conexo e suponha por absurdo que existem

$$x, y \in E, \quad x < z < y \quad \text{e} \quad z \notin E.$$

Tome $A_z := E \cap (-\infty, z]$, $B_z := E \cap (z, +\infty)$. Então $A_z \neq \emptyset$ pois $x \in A_z$, $B_z \neq \emptyset$ pois $y \in B_z$ e:

$$A_z \cap \overline{B_z} = B_z \cap \overline{A_z} = \emptyset.$$

Logo $A_z \cup B_z = E$ e A_z e B_z são separados, absurdo.

($\Leftarrow$) Suponha que E não seja conexo. Então, existem A e B não vazios e separados tais que:

$$A \cup B = E.$$

Tome $x \in A$, $y \in B$ e assuma s.p.g que $x < y$. Defina:

$$z = \sup(A \cap [x,y])$$

Por um teorema anterior temos $z \in \overline{A}$ $\therefore$ $z \notin B$. Em particular:

$$x \leq z < y \quad \text{(pela def do sup e do fato que } z \notin B)$$

Se $z \notin A$ então segue que $x < z < y$ e $z \notin A \cup B = E$ absurdo.

Então $z \in A$. Assim $z \notin \overline{B}$ o que implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \cap B = \emptyset \quad \therefore \quad z + \frac{\varepsilon}{2} \notin B.$$

Chame $z_1 = z + \frac{\varepsilon}{2}$. Então $z < z_1 < y \Rightarrow z_1 \notin A$ $\therefore$ $z_1 \notin A \cup B = E$ absurdo ■