Limite Inferior & Superior.

definição. Seja (s_n) uma seq. de números reais com a seguinte propriedade: Para todo real M existe um inteiro N tal que $n \geq N$ implica

$$s_n \geq M.$$

Neste caso escrevemos $s_n \to +\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Similarmente, se para todo $M > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow s_n < -M$$

escrevemos $s_n \to -\infty$ ou $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

definição. Seja (s_n) uma sequência de números reais. Seja E o conjunto dos $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tais que

$$s_{n_k} \to x \quad , \text{ para alguma subsequência } (s_{n_k}) \text{ de } (s_n).$$

Definimos o limite superior e o limite inferior de (s_n) respectivamente por:

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \sup E \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = \inf E.$$

Teorema. Seja (s_n) uma seq. de números reais e E seu conjunto imagem. Considere $s^* = \limsup_{n\to\infty} s_n$. Então:

a) $s^* \in E$

b) Se $x > s^*$, existe um inteiro N tal que se $n \geq N$ então $s_n < x$.

Além disso s^* é o único número com as propriedades (a) e (b).

Um resultado análogo vale para o limite inferior.

prova

a) Se $s^* = +\infty$ então E não é limitado superiormente, logo (s_n) não é limitada sup. $\therefore$ existe subsequência (s_{n_k}) tq $s_{n_k} \to +\infty$. Logo $s^* \in E$.

Se $s^* = -\infty$ então $E = \{-\infty\}$. Logo, $\forall$ real M, $s_n > M$ para no máximo um número finito de valores $\therefore s_n \to -\infty \therefore s^* \in E$.

Se $s^* \in E$ então E é limitado superiormente e $\therefore E \neq \emptyset$. Agora como E é fechado então $\sup E \in E \therefore s^* \in E$.

b) Suponha que existe $x > s^*$ tal que $s_n \geq x$ p/ infinitos valores de n. Então conseguimos uma subsequência (s_{n_k}) tal que: $s_{n_k} \geq x, \forall k \therefore$ existe $y \in E$ tal que $y \geq x > s^*$ absurdo.

Basta mostrar a unicidade. Suponhamos que existem p, q distintos satisfazendo (a) e (b).
Suponha $p < q$. Escolha x tal que $p < x < q$.

Como p satisfaz (b) então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall n \geq N$ temos

$s_n < x$. Em particular não existe subsequência convergindo para $q \therefore$

$q \notin E$ contradizendo (a). ∎

Exemplos.

a) Considere (s_n) uma seq. que contém todos os racionais. Então

$$E = \mathbb{R} \quad \therefore \quad \limsup_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

$$\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty.$$

b) $s_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$. Então $\limsup_{n\to+\infty} = 1$, $\liminf_{n\to\infty} s_n = -1$.

c) Seja (s_n) uma sequência de números reais então $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ se, e somente se,

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} = s \qquad \text{(Exercício - Nota 2)}$$

Teorema. Se $s_n \leq t_n$, para $n \geq N$, onde N é fixo, então

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n$$

$$\limsup_{n\to+\infty} s_n \leq \limsup_{n\to+\infty} t_n$$

demonstração (Exercício).

Algumas sequências especiais

- Os cálculos feitos abaixo serão baseados na seguinte observação:

se $0 \leq x_n \leq s_n$ para $n \geq N$, onde N é algum número fixo,

se $s_n \to 0$ então $x_n \to 0$.

Teorema.

a) Se $p > 0$, então $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0$

b) Se $p > 0$, então $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{p} = 1$

c) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

d) Se $p > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

e) Se $|x| < 1$, então $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$.

Prova:

a) Dado $\varepsilon > 0$ qq, tome n_0 grande o bastante para que:

$$n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}.$$

Então $n_0^p > \frac{1}{\varepsilon}$ $\therefore$ $\varepsilon > \frac{1}{n^p}$, $\forall n \geq n_0$. Assim $\frac{1}{n^p} \to 0$.

b) Seja $p>1$, defina $x_n := \sqrt[n]{p} - 1$. Então $x_n > 0$ e:

$$p = (x_n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x_n^k \geq 1 + \binom{n}{1} x_n = 1 + n \cdot x_n .$$

Logo

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}$$

Como $\frac{p-1}{n} \to 0$ então segue que $x_n \to 0$ como queríamos.

- Se $p=1$ trivial
- Se $p<1$ então tome $q = \frac{1}{p}$. Assim $q>1$ e, pelo que já demonstramos temos que:

$$\sqrt[n]{q} \to 1 \therefore \frac{1}{\sqrt[n]{p}} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} \to 1 \blacksquare$$

c) Tome $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Então $x_n \geq 0$ e, novamente pelo binômio de Newton segue que:

$$n = (x_n+1)^n \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} .$$

Então $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Como $\frac{2}{n-1} \to 0$ segue que $x_n \to 0$ $\blacksquare$

d) Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k > \alpha$, $k > 0$. Para $n > 2k$ temos:

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!} .$$

Então $0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k \cdot k!}{n^k p^k} \cdot n^\alpha = \left(\frac{2^k \cdot k!}{p^k}\right) \cdot n^{\alpha - k}$ $(n > 2k)$

Como $\alpha < k$ então

$$\frac{2^k\, k!}{p^k} \cdot n^{\alpha - k} \longrightarrow 0$$

Logo $\dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} \to 0$

e) Escreva x na forma $x = \dfrac{1}{1+p}$ e tome $\alpha = 0$ em (d) ■

Séries

definição: Dada uma seq. $\{a_n\}$ usaremos a notação $\sum_{n=p}^{q} a_n$ $(p \leq q)$

para denotar a soma $a_p + \dots + a_q$. Podemos associar à seq. (a_n) uma nova sequência (s_n) dada por:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Para (s_n) nós também usamos a expressão simbólica: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, ou mais concisamente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad (*)$$

Chamamos o símbolo $(*)$ de série infinita, ou simplesmente série. Os valores s_n são chamados de somas parciais da série.

- Se (s_n) converge para s dizemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s .$$