• Tome n_1 o menor natural tal que : $d(p_{n_1}, p) < 1$.

• Tome n_2 o menor natural tal que $n_2 > n_1$ e $d(p_{n_2}, p) < 1/2$.

• Tendo tomado n_i, tome n_{i+1} o menor natural tal que $n_{i+1} > n_i$ e e $d(p_{n_{i+1}}, p) < \frac{1}{i+1}$.

Então a subsequência (p_{n_i}) converge para p como queríamos.

(b) Se $E \subset \mathbb{R}^k$ é limitado então existe k-célula $I \subset \mathbb{R}^k$ tal que $E \subset I$.

Como I é compacta, a parte (a) conclui o que queríamos ■

Teorema. Seja (p_n) uma sequência em um espaço métrico X então o conjunto de todos os limites de subsequências de (p_n) é um conjunto fechado.

prova. Denote por E^* tal conjunto. Tome q um ponto de acumulação de E^*; queremos mostrar que $q \in E^*$.

Tome o primeiro n_1 tal que $p_{n_1} \neq q$ (se tal n_1 não existe, então $E^* = \{q\}$ que é fechado).

Tome $\delta = d(p_{n_1}, q)$. Suponha que $p_{n_1}, \dots, p_{n_{i-1}}$ estão escolhidos. Como q é pto de acumulação de E^*, existe um $x \in E^*$ tal que:

$$d(x, q) < \delta/2^i .$$

Como $x \in E^*$, existe $n_i > n_{i-1}$ tal que : $d(x, p_{n_i}) < \delta/2^i$. Assim temos

$$d(p_{n_i}, q) < \delta/2^{i-1} , \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Logo (p_{n_i}) converge para q. Então $q \in E^*$ ∎

Sequências de Cauchy

definição. Uma sequência (p_n) em um espaço métrico X é dita uma sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existir um inteiro N tal que:

$$\forall\, n \geq N \text{ e } m \geq N \text{ temos } d(p_n, p_m) < \varepsilon.$$

definição (diâmetro) Seja E um subconjunto não vazio de um espaço métrico X, e seja S o conjunto dos números reais da forma $d(p,q)$, com $p \in E$ e $q \in E$. Definimos o diâmetro de E por:

$$\operatorname{diam}(E) := \sup S$$

ou seja,

$$\operatorname{diam}(E) := \sup\{d(p,q) : p \in E, q \in E\}.$$

Observação: Se (p_n) é uma sequência em X e $E_N := \{p_{N+1}, p_{N+2}, \dots\}$, então (p_n) é seq. de Cauchy se, e somente se,

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{diam} E_N = 0.$$

Teorema.

a) Seja (X,d) um espaço métrico e $E \subset X$, então

$$\operatorname{diam}(\overline{E}) = \operatorname{diam}(E).$$

(b) Se K_n é uma sequência de conjuntos compactos em X tais que

1) $K_n \supset K_{n+1}$, $\forall\ n \geq 1$

2) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0$

então $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ consiste de exatamente 1 ponto.

prova.

a) Como $E \subset \overline{E}$ é claro que $\operatorname{diam} E \leq \operatorname{diam} \overline{E}$.

Fixe $\varepsilon > 0$ qualquer e escolha $p, q \in \overline{E}$ quaisquer. Pela definição de $\overline{E}$, existem $p', q' \in E$ tais que:

$$d(p,p') < \varepsilon \ , \ d(q,q') < \varepsilon .$$

Então: $d(p,q) \leq d(p,p') + d(p',q') + d(q,q') < 2\varepsilon + d(p',q')$.

Em particular: $d(p,q) < 2\varepsilon + \operatorname{diam}(E)$.

Pela definição de $\operatorname{diam}(\overline{E})$ segue que: $\operatorname{diam}(\overline{E}) \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam}(E)$.
Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário concluímos que: $\operatorname{diam}(E) = \operatorname{diam}(\overline{E})$.

b) Considere $K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$. Por um teorema anterior sabemos que K é não vazio.

Se K contém dois pontos distintos então $\operatorname{diam} K > 0$. Mas como $K \subset K_n$ então $\operatorname{diam} K \leq \operatorname{diam} K_n$. Como $\operatorname{diam} K_n \to 0$ caímos em contradição ∎

Teorema.

a) Em qualquer espaço métrico X, toda sequência convergente é de Cauchy.

b) Se X é um espaço métrico compacto e se $\{p_n\}$ é uma sequência de Cauchy em X, então $\{p_n\}$ converge a algum ponto de X.

c) Em $\mathbb{R}^k$ toda seq. de Cauchy converge.

prova.

a) Suponha que $p_n \to p$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) < \varepsilon/2 .$$

Assim, $\forall\ n, m \geq N$ temos: $d(p_n, p_m) \leq d(p, p_n) + d(p, p_m) < \varepsilon$. Ou seja, a seq. é de Cauchy.

b) Seja $\{p_n\}$ uma seq. de Cauchy em um espaço compacto X. Defina

$$E_N = \{p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \dots\}.$$

Observe que $\lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{diam} E_N = 0$. Mas como $\operatorname{diam} E_N = \operatorname{diam} \overline{E_N}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{E_n}) = 0.$$

Como X é compacto e $\overline{E_N} \subset X$ é fechado então $\overline{E_N}$ é compacto em X. Além disso $\overline{E_N} \supset \overline{E_{N+1}}$, $\forall N$.

Logo $\bigcap\limits_{N=1}^{+\infty} \overline{E_N}$ consiste de um único ponto $p \in X$ (pelo resultado anterior).

Ou seja, $p \in \overline{E}_N$, $\forall N$. Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe N_0 tal que:

$$\text{diam } \overline{E}_N < \epsilon, \quad \forall N \geq N_0.$$

Logo, em particular, $d(p,q) < \epsilon$, $\forall q \in \overline{E}_N$, $N \geq N_0$. Em outras palavras:

$$d(p, p_n) < \epsilon, \ \forall \ n \geq N_0 \quad \therefore \ p_n \to p \ \square$$

c) Suponha que (p_n) é uma seq. de Cauchy em $\mathbb{R}^k$. Defina E_N como na alternativa (b).

Para algum N temos $\text{diam } E_N < 1$ e portanto E_N é limitado, logo a seq. (p_n) é uma seq. limitada em $\mathbb{R}^k$. Seja $E = \{x_n : n \geq 1\}$, então

$\overline{E}$ é fechado e limitado e $\therefore$ o resultado segue de (b) $\blacksquare$

definição: Um espaço métrico (X,d) é dito completo se toda seq. de Cauchy em X for convergente.

- Acima provamos que $\mathbb{R}^k$ é completo e que todo espaço métrico compacto também é completo.

Exemplo. $X = \mathbb{Q}$ com a métrica usual não é um espaço métrico completo.

Observe que em $\mathbb{R}^k$ toda seq. convergente é limitada mas nem toda seq. limitada converge (pois nem toda seq. limitada é de Cauchy).

Há porém um caso onde ocorre a equivalência.

definição: Uma sequência (s_n) de números reais é dita:

a) crescente se $s_n \leq s_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) decrescente se $s_n \geq s_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) monótona se ela for crescente ou decrescente.

Teorema. Suponha que (s_n) é monótona. Então (s_n) converge se, e somente se, ela é limitada.

prova. Suponha que $s_n \leq s_{n+1}$, $\forall n$.

$(\Rightarrow)$ resultado anterior.

$(\Leftarrow)$ Suponha que o conjunto imagem E de (s_n) é limitado. Tome

$$s = \sup E.$$

Então $s_n \leq s$, $\forall n \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$ qq, pela def. de sup. $s - \varepsilon$ não é limitante superior de E, logo: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$s - \varepsilon < s_{n_0} \leq s.$$

Como a seq é crescente então $s - \varepsilon < s_n \leq s$, $\forall n \geq n_0$. Em particular

$$|s_n - s| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad \therefore s_n \to s \quad \blacksquare$$