Análise I - MA502, Introdução à Análise-MM202
Terceira Lista

Prof.Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP
gaponce@ime.unicamp.br

1. Prove que a convergência de uma sequência de números complexos (s_n) implica a convergência de $|s_n|$. A recíproca é verdadeira?

2. Suponha que a sequência de números reais (a_n) tenha a propriedade que

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$$

e

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a.$$

Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

3. Calcule o limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - n$.

4. Se $s_1 = \sqrt{2}$ e

$$s_{n+1} = \sqrt{2+s_n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

prove que (s_n) converge e que $s_n < 2$ para todo $n \geq 1$.

5. Defina limite superior e limite inferior de uma sequência (x_n) de números reais.

6. Considere duas sequências numéricas (a_n) e (b_n) de números reais, ambas limitadas. Mostre que

a) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$;

b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$.

7. Determine o $\limsup$ e o $\liminf$ da sequência (s_n) definida por:

$$s_1 = 0, \quad s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}, \quad s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}.$$

8. Sejam (a_n), (b_n) duas sequências quaisquer de números reais, prove que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

sempre que a soma da direita não seja da forma $+\infty - \infty$ ou $-\infty + \infty$.

9. Determine o comportamento (se é convergente ou se é divergente) de $\sum a_n$ em cada um dos seguintes casos:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

b) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

c) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$;

d) $a_n = \frac{1}{1+z^n}$, para valores complexos de z;

10. Mostre que a convergência de $\sum a_n$ implica a convergência de

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n},$$

se $a_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$.

11. Se $\sum a_n$ converge e (b_n) é uma sequência monótona e limitada, prove que

$$\sum a_n b_n$$

converge.

12. Determine o raio de convergência de cada uma das seguintes séries de potências:

a) $\sum n^3 z^n$,

b) $\sum \frac{2^n}{n!} z^n$,

c) $\sum \frac{2^n}{n^2} z^n$.

13. Suponha que os coeficientes de uma série de potências $\sum a_n z^n$ são inteiros sendo infinitos deles não nulos. Prove que o raio de convergência da série é no máximo 1.

14. Suponhamos que $a_n > 0$, $s_n = a_1 + ... + a_n$ e $\sum a_n$ diverge.

i) Prove que

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}$$

diverge.

ii) Prove que

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + ... + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

e deduza que $\sum \frac{a_n}{s_n}$ diverge.

iii) Prove que

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

e deduza que $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ converge.

15. Seja (s_n) uma sequência de números complexos, defina sua média aritmética σ_n por

$$\sigma_n := \frac{\sum_{k=0}^{n} s_k}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Mostre que se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ então $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$. A recíproca é verdadeira? Ou seja, dada uma sequência (s_n) para a qual $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ para algum s, é verdade que (s_n) converge para s?

16. Fixe um número positivo α. Escolha $x_1 > \sqrt{\alpha}$, e defina $x_2, x_3, x_4, ...$ pela recursão:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$$

Prove que (x_n) é uma sequência decrescente e que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.

17. Seja E_n uma sequência de conjuntos fechados não vazios e limitados em um espaço métrico **completo** X. Se $E_n \supset E_{n+1}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \text{diam} E_n = 0$$

então a interseção

$$\bigcap_{1}^{\infty} E_n$$

consiste de um único ponto.

18. Suponha que (p_n) e (q_n) são sequências de Cauchy em um espaço métrico X. Mostre que a sequência

$$(d(p_n, q_n))_n$$

converge.

19. Prove que a série

$$\sum_{p \text{ é primo}} \frac{1}{p}$$

é divergente.