demonstração:

a) Tome $x \in \bigcup_\alpha G_\alpha$. Então existe α tal que $x \in G_\alpha$. Como G_α é aberto existe $r > 0$ tal que:

$$B(x,r) \subset G_\alpha \subset \bigcup_\alpha G_\alpha .$$

Assim x é ponto interior de $\bigcup_\alpha G_\alpha$. Como x era arbitrário segue que $\bigcup_\alpha G_\alpha$ é aberto.

b) Como cada F_α é fechado temos, pelo teorema anterior, que F_α^c é aberto.

Assim pela parte (a) temos: $\bigcup_\alpha F_\alpha^c$ é aberto. Novamente pelo Teo. anterior segue que: $(\bigcup_\alpha F_\alpha^c)^c$ é fechado.

Por De Morgan: $(\bigcup_\alpha F_\alpha^c)^c = \bigcap_\alpha (F_\alpha^c)^c = \bigcap_\alpha F_\alpha$, e portanto $\bigcap_\alpha F_\alpha$ é fechado, como queríamos provar.

c) Seja $x \in G_1 \cap \ldots \cap G_n$, então $x \in G_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como G_i é aberto existe $r_i > 0$ tal que:

$$B(x, r_i) \subset G_i \quad , \; 1 \leq i \leq n.$$

Tome $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$. Então $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i$, logo x é ponto interior de $\bigcap_{i=1}^n G_i$

d) Por De Morgan temos $\bigcup_{i=1}^n F_i = \left((\bigcup_{i=1}^n F_i)^c \right)^c = \left(\bigcap_{i=1}^n F_i^c \right)^c$.

Pelo item (c) $\bigcap_{i=1}^n F_i^c$ é aberto. Assim, por um teorema anterior segue que

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = \left(\bigcap_{i=1}^n F_i^c \right)^c \text{ é fechado } \blacksquare$$

Exemplo. Nos itens (c) e (d) a finitude é necessária.

Considere $G_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ que não é aberto.

definição (Fecho) Seja X um espaço métrico e $E \subset X$. Denotaremos por E' o conjunto de todos os pontos de acumulação de E.

Definimos o fecho de E como sendo o conjunto: $\overline{E} = E \cup E'$.

Teorema. Se X é um espaço métrico e $E \subset X$, então

a) $\overline{E}$ é fechado,

b) $E = \overline{E}$ se, e somente se, E é fechado,

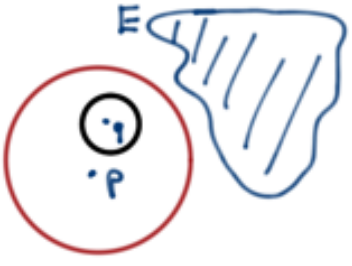
c) $\overline{E} \subset F$ para todo subconjunto fechado $F \subset X$ tal que $E \subset F$.

Por (a) e (c) concluímos que $\overline{E}$ é o menor fechado que contém E.

prova.

a) Tome $p \in (\overline{E})^c$. Então $p \notin E$ e $p \notin E'$. Como $p \notin E'$, existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \cap E = \emptyset$.

Agora observe que se $q \in B(p,r) \cap E'$ então podemos tomar $s > 0$ tal que $B(q,s) \subset B(p,r) \subset E^c$.



Mas isso implica $q \notin E'$ absurdo. Logo $B(p,r) \subset (\overline{E})^c$ o que implica que $(\overline{E})^c$ é aberto $\therefore$ $\overline{E}$ é fechado.

b) Se $E = \overline{E}$ então por (a) segue que E é fechado.

Se E é fechado então, por definição, temos $E' \subset E$ $\therefore$ $\overline{E} = E \cup E' \subset E \subset \overline{E}$ assim $E = \overline{E}$.

c) Se F é fechado e $F \supset E$ então $F \supset \underbrace{F' \supset E'}$. Logo $F \supset E \cup E' = \overline{E}$.

pois se um ponto $p \in X$ é de acumulação para E e $E \subset F$ então ele tb é de acumulação para F.

<u>Teorema</u>. Seja $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, um conjunto limitado superiormente. Seja $y = \sup E$. Então:

i) $y \in \overline{E}$

ii) $y \in E$ se E é fechado.

<u>prova</u>.
Para provar que $y \in \overline{E}$ basta provar que y é ponto de acumulação de E ou $y \in E$.
Suponha $y \notin E$.
Dado $\varepsilon > 0$ qq tome a bola aberta $B(y, \varepsilon) = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Como $y = \sup E$ então $y - \varepsilon < y$ não é limitante superior de E, assim, existe $x \in E$ tal que $y - \varepsilon < x$. Logo $y - \varepsilon < x \leq y$ $\therefore$ $x \in B(y, \varepsilon) \setminus \{y\}$.

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que $y \in E'$. Logo $y \in E \cup E' = \overline{E}$.

Com efeito, se E é fechado então $E = \overline{E}$ logo $y \in E$ ■

Observação. Se (X,d) é um espaço métrico e $Y \subset X$ então (Y,d) tb é um espaço métrico.

Agora suponha que $E \subset Y \subset X$. Como $E \subset Y$ e $E \subset X$ podemos perguntar se E é aberto em Y e tb se E é aberto em X.

definição. Sejam $E \subset Y \subset X$ onde (X,d) é um espaço métrico. Diremos que E é aberto (respec. fechado) relativamente a Y se no espaço métrico (Y,d) ele for aberto (respec. fechado).

Em particular, E é aberto rel. a Y se dado $x \in E$ existir $r>0$ tal que:

$$\text{se } q \in Y \text{ e } d(q,x) < r \text{ então } q \in E.$$

Exemplo. $(a,b) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. (a,b) é aberto relativamente a $\mathbb{R}$ mas não é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Teorema. Suponha que X é um espaço métrico e $Y \subset X$. Um subcjto $E \subset Y$ é aberto relativamente a Y se, e somente se, existe um aberto G de X tal que:

$$E = G \cap Y.$$

prova.

Suponha que E é aberto relativamente a Y. Para cada $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $B_x := B(x, r_x) \cap Y \subset E$.

Assim $E = \bigcup_{x \in E} B_x = \left(\bigcup_{x \in E} B(x, r_x) \right) \cap Y$

Como cada $B(x, r_x)$ é aberto de X temos que $\bigcup_{x \in E} B(x, r_x)$ é aberto de X. Chame

$$G = \bigcup_{x \in E} B(x, r_x).$$

Então $E = G \cap Y$ como queríamos.

Reciprocamente, se G é um aberto de X e $E := G \cap Y$ então dado $x \in E$ temos $x \in G$ $\therefore$ $\exists\, r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$. Em particular $B(x, r) \cap Y \subset G \cap Y = E$,

concluindo o que queríamos ■

Conjuntos Compactos

compacto[1]

adjetivo

1. cujos elementos ou partes constituintes são ou estão firmemente unidos entre si.
   "madeira c."
2. de pequeno tamanho, reduzido, simplificado.
   "cabeça c."

definição: Seja E um subconjunto de um espaço métrico X, uma cobertura aberta de E é uma coleção $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abertos de X tais que

$$E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

definição (Conjunto Compacto) Um subconjunto K de um espaço métrico X é dito compacto se toda cobertura aberta de K admitir uma subcobertura finita.

Mais especificamente, um subconjunto $K \subset X$ é compacto se, dada qualquer coleção de abertos $\{G_\alpha\}_\alpha$ tal que

$$K \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$$

existir uma subcoleção finita $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\} \subset \{G_\alpha\}_\alpha$ tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} .$$

Teorema. Suponha que $K \subset Y \subset X$. Então K é compacto relativamente a X se, e somente se, K é compacto relativamente a Y.

prova: Suponhamos que K seja compacto relativamente a X. Tome $\{V_\alpha\}_\alpha$ uma cobertura aberta, relativamente a Y, de K. Então por um resultado anterior sabemos que:

para cada α, $\exists\, G_\alpha$ aberto em X tal que $V_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

Então $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$. Como K é compacto relativamente a X

podemos tomar uma subcoleção $G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n}$ tal que: $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.

Assim, $K \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\right) \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$.

Ou seja, K é compacto em Y.

Reciprocamente, se K é compacto em Y, dada uma cobertura $\{G_\alpha\}$ aberta (relativamente a X) temos que $\{G_\alpha \cap Y\}_\alpha$ é cob. aberta relativamente a Y. Logo $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que: $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cap Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. Donde segue que K é compacto em X ■