Pela desigualdade triangular temos:

$$\|\lambda a+(1-\lambda)b-x\| = \|\underbrace{\lambda(a-x)}_{\lambda a-\lambda x} + \underbrace{(1-\lambda)(b-x)}_{(1-\lambda)b-x+\lambda x}\|$$

$$\leq \|\lambda(a-x)\| + \|(1-\lambda)(b-x)\| =$$

$$= \lambda\|a-x\| + (1-\lambda).\|b-x\| < \lambda.r+(1-\lambda).r = r.$$

Logo $B(x,r)$ é convexa.

Exercício. Mostre que a bola fechada $B[x,r] \subset \mathbb{R}^k$ é convexa e que k-células em $\mathbb{R}^k$ tb são convexos.

– Agora estamos em condição de generalizar esses conceitos facilmente para espaços métricos gerais.

definição. Seja (X,d) um espaço métrico. Todos os ptos e conjuntos mencionados abaixo estão em X.

a) Uma bola aberta (ou vizinhança) de centro p e raio r é o conjunto $B(p,r)$ definido por:

$$B(p,r) = \{x \in X : d(x,p) < r\}$$

b) Uma bola fechada de centro p e raio r é o conjunto $B[p,r]$ dado por

$$B[p,r] = \{x \in X : d(x,p) \leq r\}.$$

definição (Ponto interior & Conjunto Aberto)

Seja (X, d) um espaço métrico e $E \subset X$. Um ponto $p \in E$ é dito um <u>ponto interior</u> de E se

$$\text{existe } r > 0 \text{ tal que } B(p, r) \subset E.$$

Um conjunto $E \subset X$ é dito <u>aberto</u> se todo ponto $x \in E$ é ponto interior de X.

definição. (Ponto de Acumulação & Conjunto fechado)

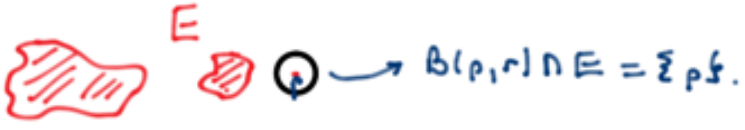
Seja (X, d) um espaço métrico, $E \subset X$, um ponto $p \in X$ é dito ponto de acumulação de E se

- <u>para todo $r > 0$</u> temos $E \cap (B(p, r) \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

Um conjunto $E \subset X$ é dito <u>fechado</u> se <u>todo</u> ponto de acumulação de E estiver em E.

definição. Seja (X, d) um espaço métrico

a) Se $E \subset X$, $p \in E$ e p não é ponto de acumulação de E então p é dito ponto isolado de E.



b) Um conjunto $E \subset X$ é dito limitado se existir $R > 0$ e $x \in X$ tal que

$$E \subset B(x, R)$$

c) Um conjunto $E \subset X$ é dito denso em X se TODO ponto $x \in X$ é ponto de acumulação de E, ou seja, dado qualquer $x \in X$ existe $r > 0$ tal que

$$(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset .$$

definição. Um conjunto $E \subset X$ é chamado de perfeito se:

1) E é fechado e

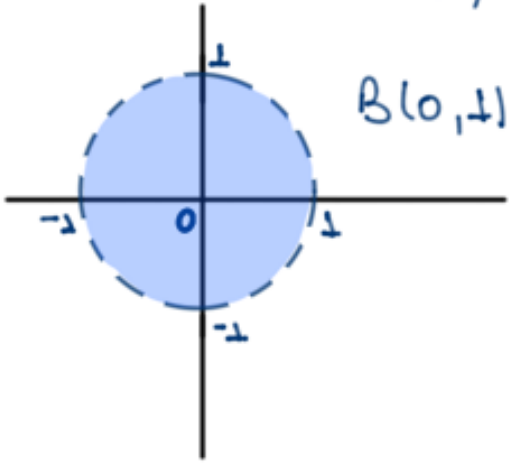
2) Todo ponto $p \in E$ é ponto de acumulação de E (ou seja, E não tem pontos isolados).

Exemplos de bolas abertas. Observe que a definição de bola aberta e bola fechada depende da métrica escolhida.

1. Considere $(\mathbb{R}^2, d)$ onde d é a métrica usual, ou seja,

$$d((x_1,y_1);(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} .$$

Neste espaço métrico a bola $B(0,1)$ é dada por:



2. Considere agora a função

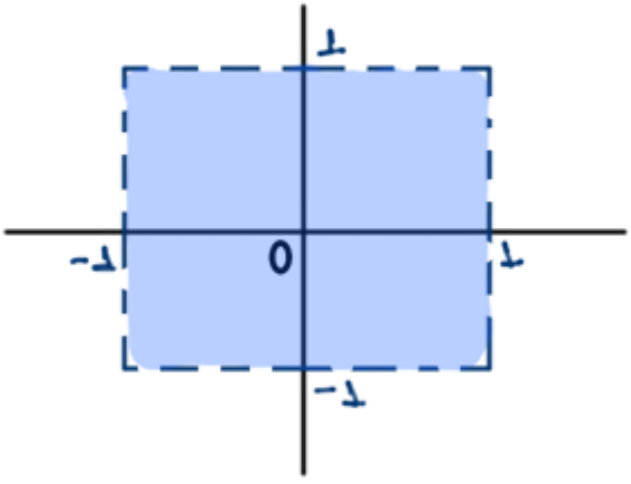
$$d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_2((x_1,y_1);(x_2,y_2)) = \max\{|x_1-y_1|;|x_2-y_2|\}.$$

Exercício. Verifique que d_2 é uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

Desenhando a bola $B(0,1)$ em $(\mathbb{R}^2, d_2)$ temos o seguinte:

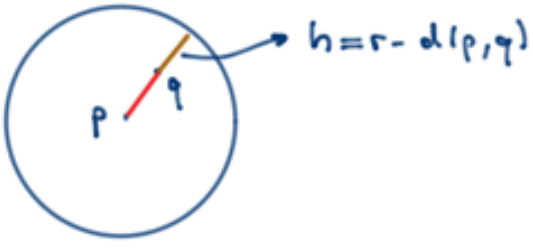
$B(0,1) = (0,1)\times(0,1)$



Teorema. Toda bola aberta é um conjunto aberto.

prova. Considere uma bola aberta $E = B(p,r) \subset X$, onde (X,d) é um espaço métrico.

Tome $q \in E$ um ponto qualquer. Como $d(p,q) < r$, podemos tomar o número $h > 0$ dado por: $h = r - d(p,q)$.



Vamos mostrar que $B(q, h/2) \subset E$.

Tome $z \in B(q, h/2)$. Então $d(z,q) < h/2$, logo

$$d(z,p) \leq d(z,q) + d(q,p) < \frac{h}{2} + d(p,q) = \frac{r}{2} + \frac{d(p,q)}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Ou seja $z \in E$ como queríamos. Assim, q é ponto interior de E e, da arbitrariedade de q, segue que E é um conjunto aberto ■

Teorema. Se p é um ponto de acumulação de um conjunto E, então toda bola aberta contendo p contém infinitos pontos de E.

prova. Suponha que existe uma bola aberta $B_r(x)$ tal que $p \in B_r(x)$ e $B_r(x)$ contém apenas um número finito de pontos de E: $q_1, q_2, \dots, q_n$, todos distintos de p.

Defina: $r = \min\limits_{1 \le i \le n} d(p, q_i)$

Do fato $r > 0$ e observe que a bola $B(p, r/2)$ não contém nenhum dos q_i's, ou seja $B(p, r/2) \cap E = \emptyset$, contradizendo o fato que p é pto de acumulação do conjunto E ■

Corolário. Um conjunto que possui um número finito de pontos não possui pontos de acumulação.

Exemplos: Consideremos os seguintes conjuntos

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$

c) X um cjto não vazio finito

d) $\mathbb{Z}$

e) $\{1/n : n = 1, 2, 3, \dots\}$

f) $\mathbb{R}^2$

g) O intervalo $(a, b] \subset \mathbb{R}$

Vamos classificar os conjuntos (a) — (g)

(a) — $B(0,1)$ não é fechado pois o ponto $z=1$ é pto de acumulação de $B(0,1)$ e não está em $B(0,1)$

- É aberto

- Não é perfeito (pois já não é fechado)

- Limitado? Sim!

(b) — Fechado? Sim, pois tome $z \in \mathbb{C}$ um ponto de acumulação de $B[0,1]$. Suponha, por absurdo que $z \notin B[0,1]$. Então $|z|>1$. Tome

$$r := \frac{|z|-1}{2} > 0$$

Como z é ponto de acumulação de $B[0,1]$ existe $q \neq z$, $q \in B(z,r)$.

Mas aí temos: $d(z,0) \leq d(z,q) + d(q,0) \Rightarrow |z| = d(z,0) < \frac{|z|-1}{2} + 1 \Rightarrow$

$$2|z| < |z|-1+2 = |z|+1 \quad \therefore \quad |z|<1 \text{ absurdo!}$$

Logo de fato $z \in B[0,1]$, ou seja, $B[0,1]$ é fechado.

- Aberto? Não. O ponto $z=1$ não é ponto interior de $B[0,1]$ pois dado qualquer $r>0$ o ponto $y = 1+\frac{r}{2}$ pertence à bola $B(z,r)$ mas não pertence a $B[0,1]$.

- Perfeito? Sim. Dado qualquer ponto $z \in B[0,1]$ e qualquer $r>0$ temos que $y_0 := z+\frac{r}{2}$ ou $y_1 := z-\frac{r}{2}$ estará em $(B(z,r)\setminus\{z\}) \cap B[0,1]$.

- Limitado? Sim, $B[0,1] \subset B(0,2)$.

c) - Fechado? Sim pois não tem ponto de acumulação.

- Aberto? Não.

- Perfeito? Não! Nenhum ponto é de acumulação!

- Limitado? Sim. Seja X o tal cjto e M o espaço métrico onde ele está tome $a \in M$ qualquer. Tome $r = \max_{x \in X} d(a,x)$.

Então $X \subset B(x, 2a)$.

d) - Fechado? Sim pois não tem pto de acumulação

- Aberto? Não.

- Perfeito? Não

- Limitado? Não.

e) $\{ 1/n : n \in \mathbb{N}^* \} =: X$. Fechado? Não pois 0 é ponto de acumulação e não está no conjunto.

- Aberto? Não.

- Perfeito? Não

- Limitado? Sim: $X \subset B(0,2)$.

f) $\mathbb{R}^2$ é fechado, aberto, perfeito e não é limitado.

g) $(a,b) \subset \mathbb{R}$ não é fechado pois a e b são ptos de acumulação e não estão em (a,b). Ele é aberto pois $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$. Não é perfeito e é limitado.