ChocOlimpíada de Análise 1

Prof. Gabriel Ponce
IMECC- UNICAMP

Os problemas 3 e 4 podem ser enviados em horários diferentes e as pontuações de ambos são independentes.

Problema 3. (80 pts)
Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$(a + A) \cap A = \emptyset,$$

onde $a + A$ denota o conjunto

$$a + A = \{a + b : b \in A\}.$$

Problema 4. (120 pts) Considere uma família $\mathcal{C}$ de círculos (circunferências) no plano $\mathbb{R}^2$, todos eles distintos, com a seguinte propriedade: dados dois círculos $C, D \in \mathcal{C}$, C e D não se cruzam (ou seja, eles podem se tangenciar, serem disjuntos ou um conter o outro, apenas não podem se cruzar). Mostre que o conjunto de pontos do plano que são interseções de dois círculos pertencentes a $\mathcal{C}$ é no máximo enumerável.