- Limitado? Sim, $B[0,1] \subset B(0,2)$.

c) - Fechado? Sim pois não tem ponto de acumulação.

- Aberto? Não.

- Perfeito? Não! Nenhum ponto é de acumulação!

- Limitado? Sim. Seja X o tal cjto e M o espaço métrico onde ele está tome $a \in M$ qualquer. Tome $r = \max_{x \in X} d(a,x)$.

Então $X \subset B(x, 2a)$.

d) - Fechado? Sim pois não tem pto de acumulação

- Aberto? Não.

- Perfeito? Não

- Limitado? Não.

e) $\{ 1/n : n \in \mathbb{N}^* \} =: X$. Fechado? Não pois 0 é ponto de acumulação e não está no conjunto.

- Aberto? Não.

- Perfeito? Não

- Limitado? Sim: $X \subset B(0,2)$.

f) $\mathbb{R}^2$ é fechado, aberto, perfeito e não é limitado.

g) $(a,b) \subset \mathbb{R}$ não é fechado pois a e b são ptos de acumulação e não estão em (a,b). Ele é aberto pois $(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$. Não é perfeito e é limitado.

- Relações entre cjtos abertos & fechados

Teorema (Lei de De Morgan) Seja $\{E_\alpha\}$ uma família qualquer de cjtos. Então

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha E_\alpha^c.$$

prova. Chame $A = \left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c$, $B := \bigcap_\alpha E_\alpha^c$.

Se $x \in A$ então $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$, o que implica que existe α tal que $x \notin E_\alpha$. Em particular

$$x \notin \bigcap_\alpha E_\alpha \Rightarrow x \in B.$$

Logo $A \subset B$.

Se $x \in B$ então $x \in E_\alpha^c$ para todo α. Logo $x \notin E_\alpha$ para todo α o que implica $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$.
Assim $x \in A$ $\therefore$ $B \subset A$.

Concluímos então que $A = B$ ■

Teorema. Um conjunto E é aberto se, e somente se, seu complementar E^c, é fechado.

prova:

($\Leftarrow$) Primeiro suponha que E^c é fechado. Tome $x \in E$ qualquer. Queremos provar que x é ponto interior de E.
Como $x \notin E^c$ e E^c é fechado então x não é ponto de acumulação de E^c.
Logo, existe $r > 0$ tal que:

$$(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap E^c = \emptyset.$$

Ou seja, para tal $r > 0$ temos $B(x,r) \subset E \Rightarrow x$ é ponto interior de E.

Da arbitrariedade de x segue que E é aberto.

($\Rightarrow$) Suponha que E é aberto. Tome $y \in X$ um ponto de acumulação de E^c.
Como $X = E \cup E^c$ então $y \in E$ ou $y \in E^c$.
Suponha que $y \in E$. Como y é ponto interior de E, existe $r > 0$ tal que:

$$B(y,r) \subset E \quad \therefore \quad B(y,r) \cap E^c = \emptyset$$

o que contradiz o fato que y é ponto de acumulação de E^c. Logo $y \in E^c$ donde segue que E^c é fechado ■

Corolário. Um cjto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.

Teorema.

a) Seja $\{G_\alpha\}$ uma coleção de conjuntos abertos então

$$\bigcup_\alpha G_\alpha \quad \text{é um cjto aberto.}$$

b) Seja $\{F_\alpha\}$ uma coleção de conjuntos fechados então

$$\bigcap_\alpha F_\alpha \quad \text{é um cjto fechado.}$$

c) Sejam $G_1, \dots, G_n$ conjuntos abertos então

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \quad \text{é um conjunto aberto.}$$

d) Sejam $F_1, F_2, \dots, F_n$ conjuntos fechados, então

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i \quad \text{é um conjunto fechado.}$$

demonstração:

a) Tome $x \in \bigcup_\alpha G_\alpha$. Então existe α tal que $x \in G_\alpha$. Como G_α é aberto existe $r>0$ tal que:

$$B(x,r) \subset G_\alpha \subset \bigcup_\alpha G_\alpha.$$

Assim x é ponto interior de $\bigcup_\alpha G_\alpha$. Como x era arbitrário segue que $\bigcup_\alpha G_\alpha$ é aberto.

b) Como cada F_α é fechado temos, pelo teorema anterior, que F_α^c é aberto.

Assim pela parte (a) temos: $\bigcup_\alpha F_\alpha^c$ é aberto. Novamente pelo Teo. anterior segue que: $(\bigcup_\alpha F_\alpha^c)^c$ é fechado.

Por De Morgan: $(\bigcup_\alpha F_\alpha^c)^c = \bigcap_\alpha (F_\alpha^c)^c = \bigcap_\alpha F_\alpha$, e portanto $\bigcap_\alpha F_\alpha$ é fechado, como queríamos provar.

c) Seja $x \in G_1 \cap \dots \cap G_n$, então $x \in G_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como G_i é aberto existe $r_i > 0$ tal que:

$$B(x,r_i) \subset G_i \quad , 1 \leq i \leq n.$$

Tome $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$. Então $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i$, logo x é ponto interior de $\bigcap_{i=1}^n G_i$

d) Por De Morgan temos $\bigcup_{i=1}^n F_i = ((\bigcup_{i=1}^n F_i)^c)^c = (\bigcap_{i=1}^n F_i^c)^c$.

Pelo item (c) $\bigcap_{i=1}^n F_i^c$ é aberto. Assim, por um teorema anterior segue que

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = (\bigcap_{i=1}^n F_i^c)^c \text{ é fechado} \blacksquare$$

Exemplo. Nos itens (c) e (d) a finitude é necessária.

Considere $G_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ que não é aberto.

definição (Fecho) Seja X um espaço métrico e $E \subset X$. Denotaremos por E' o conjunto de todos os pontos de acumulação de E.

Definimos o fecho de E como sendo o conjunto: $\overline{E} = E \cup E'$.

Teorema. Se X é um espaço métrico e $E \subset X$, então

a) $\overline{E}$ é fechado,

b) $E = \overline{E}$ se, e somente se, E é fechado,

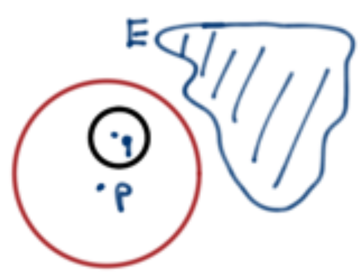
c) $\overline{E} \subset F$ para todo subconjunto fechado $F \subset X$ tal que $E \subset F$.

Por (a) e (c) concluímos que $\overline{E}$ é o menor fechado que contém E.

prova.

a) Tome $p \in (\overline{E})^c$. Então $p \notin E$ e $p \notin E'$. Como $p \notin E'$, existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \cap E = \emptyset$.

Agora observe que se $q \in B(p,r) \cap E'$ então podemos tomar $s > 0$ tal que $B(q,s) \subset B(p,r) \subset E^c$. Mas isso implica $q \notin E'$ absurdo. Logo $B(p,r) \subset (\overline{E})^c$ o que implica que $(\overline{E})^c$ é aberto $\therefore$ $\overline{E}$ é fechado.



b) Se $E = \overline{E}$ então por (a) segue que E é fechado.

Se E é fechado então, por definição, temos $E' \subset E$ $\therefore$ $\overline{E} = E \cup E' \subset E \subset \overline{E}$ assim $E = \overline{E}$.

c) Se F é fechado e $F \supset E$ então $F \supset \underbrace{F' \supset E'}$. Logo $F \supset E \cup E' = \overline{E}$.

pois se um ponto $p \in X$ é de acumulação para E e $E \subset F$ então ele é de acumulação para F.

Teorema. Seja $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, um conjunto limitado superiormente. Seja $y = \sup E$. Então:

i) $y \in \overline{E}$

ii) $y \in E$ se E é fechado.

prova.

Para provar que $y \in \overline{E}$ basta provar que y é ponto de acumulação de E ou $y \in E$.
Suponha $y \notin E$.
Dado $\varepsilon > 0$ qq tome a bola aberta $B(y, \varepsilon) = (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Como $y = \sup E$ então $y - \varepsilon < y$ não é limitante superior de E, assim, existe $x \in E$ tal que $y - \varepsilon < x$. Logo $y - \varepsilon < x \leq y$ $\therefore$ $x \in B(y,\varepsilon) \setminus \{y\}$.

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que $y \in E'$. Logo $y \in E \cup E' = \overline{E}$.

Com efeito, se E é fechado então $E = \overline{E}$ logo $y \in E$ ■

Observação. Se (X,d) é um espaço métrico e $Y \subset X$ então (Y,d) tb é um espaço métrico.

Agora suponha que $E \subset Y \subset X$. Como $E \subset Y$ e $E \subset X$ podemos perguntar se E é aberto em Y e tb se E é aberto em X.

definição. Sejam $E \subset Y \subset X$ onde (X,d) é um espaço métrico. Diremos que E é aberto (respec. fechado) relativamente a Y se no espaço métrico (Y,d) ele for aberto (respec. fechado).

Em particular, E é aberto rel. a Y se dado $x \in E$ existir $r>0$ tal que:

$$\text{se } q \in Y \text{ e } d(q,x) < r \text{ então } q \in E.$$

Exemplo. $(a,b) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. (a,b) é aberto relativamente a $\mathbb{R}$ mas não é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Teorema. Suponha que X é um espaço métrico e $Y \subset X$. Um subcjto $E \subset Y$ é aberto relativamente a Y se, e somente se, existe um aberto G de X tal que:

$$E = G \cap Y.$$

prova.

Suponha que E é aberto relativamente a Y. Para cada $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $B_x := B(x, r_x) \cap Y \subset E$.

Assim $E = \bigcup_{x \in E} B_x = \left(\bigcup_{x \in E} B(x, r_x) \right) \cap Y$

Como cada $B(x, r_x)$ é aberto de X temos que $\bigcup_{x \in E} B(x, r_x)$ é aberto de X. Chame

$$G = \bigcup_{x \in E} B(x, r_x).$$

Então $E = G \cap Y$ como queríamos.

Reciprocamente, se G é um aberto de X e $E := G \cap Y$ então dado $x \in E$ temos $x \in G$ $\therefore$ $\exists\, r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$. Em particular $B(x, r) \cap Y \subset G \cap Y = E$,

concluindo o que queríamos ■